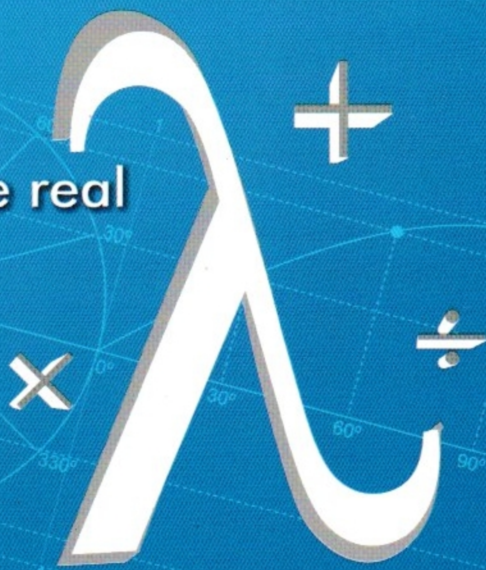
Colección Lambda

Relaciones y Funciones

Teoría y práctica

Relación binaria
Función real de variable real
Gráfica de funciones
Función inversa



ÁLGEBRA



Juan Carlos Ramos Leyva

E&M

Entremos juntos en este apasionante dominio del álgebra

RELACIONES Y FUNCIONES

RELACIÓN BINARIA
FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL
GRÁFICA DE FUNCIONES
FUNCIÓN INVERSA

Teoría y Problemas Selectos

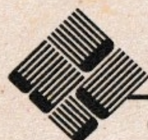
Juan Carlos Ramos Leyva

GRUPO EDITORIAL



Megabyte

E&M



Megabyte s.a.c
GRUPO EDITORIAL

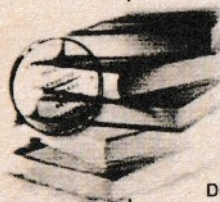
Primera Edición 2015

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
Nº 2015-06014 (Ley Nº 26905 / D.S. Nº 017-98-ED)
R.U.C. Nº 20507993444

Autor
Lic. Juan Carlos Ramos Leyva

Diseño de carátula y Diagramación
© Departamento de Edición y Producción GEM

RELACIONES Y FUNCIONES



Distribución y Ventas
Jr. Rufino Torrico 889 of. 208 - Cercado de Lima
Telefax: 332-4110

www.editorialmegabyte.com

Presentación

No cabe duda que el correr del tiempo arrastra consigo grandes cambios en nuestras vidas. De solo pensar en el ayer y compararlo con el hoy nos permite reflexionar para el mañana, pero no nos queda más que vivir el hoy correctamente venciendo todo obstáculo pues asi estaremos preparados para alcanzar el éxito en un mañana.

La experiencia adquirida como docente a lo largo de tantos años laborando en diversas instituciones educativas del pais no podia mantenerme ajeno a los problemas de aprendizaje que enfrenta un estudiante al abordar ciertos temas que se consideran complejos, dichos problemas obedecen a diversos factores siendo uno de los más importantes la falta de un texto teórico - práctico no tan señido al rigor matemático pero si respetando toda la formalidad que la matemática exige, la presente obra consta de tres fases bien definidas:

1.- Exposición de la teoría clara y concreta acompañada de ejercicios de aplicación.

2.- Serie de ejercicios y problemas resueltos ordenados secuencialmente según el grado de dificultad.

3.- Serie de ejercicios y problemas propuestos

Con el único objetivo de lograr el aprendizaje del estudiante de tan importante tema como lo es FUNCIONES, pues dicho tema constituye el armazón de toda la matemática real y consecuentemente de toda la ciencia y tecnología moderna.

Quiero terminar agradeciendo al Grupo Editorial Megabyte por hacer posible esta publicación, esperando que la presente obra tenga la acogida de mis anteriores publicaciones tanto por los estudiantes como por los colegas de quienes espero sus críticas y/o sugerencias que para mi será muy grato.

A mis queridos padres:
Oscar y Marcelina

A todos los jóvenes estudiantes que van forjando un mejor mañana.

Lic. Juan Carlos Ramos Leyva

Índice

1. DEFINICIONES PREVIAS. 5
2. RELACIONES. 9
3. FUNCIONES. 22
4. FUNCIONES ESPECIALES. 29
5. CLASES DE FUNCIONES. 35
6. FUNCIONES NOTABLES. 37
7. FUNCIONES ACOTADAS. 41
8. FUNCIONES MONÓTONAS. 42
9. DESPLAZAMIENTOS Y GIROS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN. 45
10. REESCALADO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN. 48
11. IGUALDAD DE FUNCIONES. 49
12. ÁLGEBRA DE FUNCIONES. 50
13. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. 53
14. FUNCIÓN INVERSA. 55
15. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS. 67
16. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS. 117
17. CLAVES DE RESPUESTAS. 159

RELACIONES

y

FUNCIONES

1. DEFINICIONES PREVIAS

1.1. Par ordenado

1.1A) Definición.

Es un conjunto de dos elementos considerados en un determinado orden, si los elementos del par ordenado son **a** y **b** se le denota así: (**a** ; **b**), llamando al elemento **a** primera componente y al elemento **b** segunda componente.

Formalmente un par ordenado de elementos a y b se define de la manera siguiente:

$$(a\,;b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Donde: a = primer elemento del par (a ; b)

b = segundo elemento del par (a ; b)

1.1B) Propiedades importantes.

I) El orden de las componentes no es conmutativo.

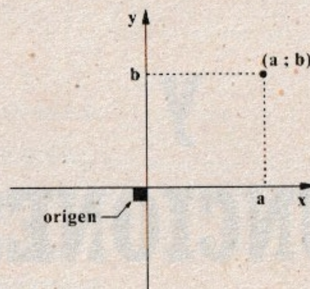
$$(a\,;b) \neq (b\,;a)\,,\ \forall\ a \neq b$$

II) Igualdad de pares ordenados.

$$\text{Si: } (a\,;b)=(m\,;n) \implies a=m \;\wedge\; b=n$$

1.1C) Representación gráfica.

El par ordenado (a ; b) en el plano cartesiano (plano x o y) representa a un punto cuya abcisa es **a** y ordenada **b**, veamos:



Ejercicio I

Calcular "m – 2n" si se cumple: $(3m+4\,;7)=(n-10\,;m+n-1)$

Resolución:

De acuerdo con la igualdad de pares ordenados, se cumple

$$3m+4=n-10 \implies 3m-n=-14 \qquad ...(1)$$

$$7=m+n-1 \implies m+n=8 \qquad ...(2)$$

Sumando (1) y (2) tenemos: $4m=-6 \implies m=-\frac{3}{2}$

Reemplazando en (2) se tiene: $-\frac{3}{2}+n=8 \implies n=\frac{19}{2}$

Finalmente el valor pedido será: $m-2n=-\frac{3}{2}-2\left(\frac{19}{2}\right)$

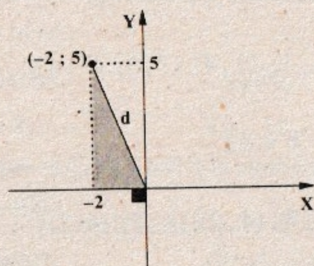
$$\therefore\; m-2n=-\frac{41}{2}$$

Ejercicio 2

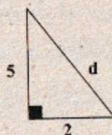
Calcular la distancia que existe desde el origen de coordenadas al lugar geométrico del par ordenado (–2 ; 5).

Resolución:

Si "d" es la distancia solicitada, según el enunciado podemos realizar la siguiente gráfica.



En el triángulo sombreado podemos aplicar el teorema de Pitágoras:



$$5^2 + 2^2 = d^2$$

$$29 = d^2$$

$$\therefore \quad d = \sqrt{29}$$

1.2. Producto cartesiano

1.2A) Definición.

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se define el producto cartesiano de A por B (en ese orden) como aquel conjunto que tiene por elementos a todos los pares ordenados (a ; b) de modo que la primera componente le pertenece al conjunto A y la segunda al conjunto B, es decir:

$$A \times B = \{(a ; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

1.2B) Propiedades importantes.

I) El producto cartesiano no es conmutativo.

$$A \times B \neq B \times A, \ \forall A \neq B$$

II) Designemos por: n(A) al número de elementos del conjunto A, luego se cumple que:

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B)$$

Ejercicio 3

Dados los conjuntos: $A = \{2, 5, 7\}$ y $B = \{3, 4\}$. Encontrar: $A \times B$ y $B \times A$

Resolución:

De acuerdo con la definición el conjunto $A \times B$ viene dado por

$$A \times B = \{(a ; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

$$\Longrightarrow \quad A \times B = \{2, 5, 7\} \times \{3, 4\}$$

$$\Longrightarrow \quad A \times B = \{(2 ; 3), (2 ; 4), (5 ; 3), (5 ; 4), (7 ; 3), (7 ; 4)\}$$

También:

$$B \times A = \{(a ; b) / a \in B \wedge b \in A\}$$

$$\Longrightarrow \quad B \times A = \{3, 4\} \times \{2, 5, 7\}$$

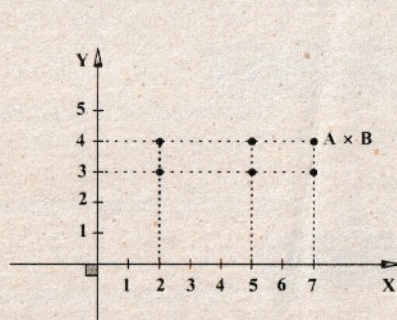
$$\Longrightarrow \quad B \times A = \{(3 ; 2), (3 ; 5), (3 ; 7), (4 ; 2), (4 ; 5), (4; 7)\}$$

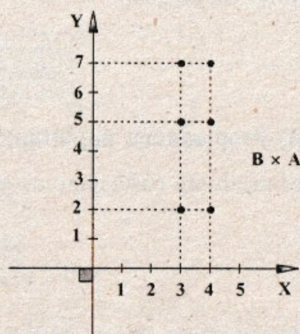
Ejercicio 4

Con la información encontrada en el ejercicio anterior, graficar: $A \times B$ y $B \times A$.

Resolución:

Se sabe que un par ordenado en el plano cartesiano representa un punto, luego como los elementos de $A \times B$ y $B \times A$ son pares ordenados, las gráficas de dichos conjuntos vienen dados por un grupo de puntos, veamos:





Ejercicio 5

Dados los conjuntos A y B definidos de la manera siguiente.

$$A = \{x \in \mathbf{Z} / -12 < x + 6 < 20\} \quad y \quad B = \{x \in \mathbf{Z} / 10 < x^2 \leq 400\}$$



¿Cuántos elementos tiene el conjunto A × B?

Resolución:

De acuerdo con lo expuesto en la propiedad (II) se pide

$$n(A \times B) = n(A) \,.\, n(B) \qquad .....(1)$$

Luego podemos apreciar que para responder a la pregunta debemos hallar n(A) y n(B).
Hallemos n(A):

Por condición: $-12 < x + 6 < 20 \iff -18 < x < 14$

como $x \in \mathbb{Z}$: $x = -17, -16, ... -1, 0, 1, ..., 12, 13$

observa que n(A) es igual a la cantidad de valores enteros que asume x, luego: n(A) = 31
Hallemos n(B):

Por condición: $10 < x^2 \leq 400 \iff -20 \leq x < -\sqrt{10} \vee \sqrt{10} < x \leq 20$

como $x \in \mathbb{Z}$: $x = -20, -19, ... -4 \vee x = 4, 5, ..., 20$

observa que n(B) es igual a la cantidad de valores enteros que asume x, luego: n(B) = 34
Finalmente reemplazando en (1) obtenemos.

$$n(A \times B) = (31)(34)$$

$$\therefore \quad n(A \times B) = 1054$$

2. RELACIONES

2.1. Relación binaria

2.1A) Definición.

Dados dos conjunto no vacíos A y B se denomina relación R de A en B (R: A→B) a todo subconjunto del producto cartesiano de A por B ($R \subset A \times B$), es decir:

$$R = \{(a\,;\,b) \,/\, a \in A \wedge b \in B \wedge a\,R\,b\}$$

Donde: a R b indica la relación que existe entre a y b

Ejercicio 6

Dados los conjuntos A ={2, 5, 7} y B ={3, 4}, determine R: A→B definida de la manera siguiente:

$$R = \{(a\,;\,b) \,/\, a \in A \wedge b \in B \wedge a + b > 8\}$$

Resolución:

Para determinar la relación R procedemos de la manera siguiente.

Como la relación R es de A en B (R: A→B) . Hallemos A × B según la definición.

$$A \times B = \{2, 5, 7\} \times \{3, 4\} = \{(2 ; 3), (2; 4), (5 ; 3), (5 ; 4), (7 ; 3), (7 ; 4)\}$$

Ahora de este conjunto escogeremos a los elementos (a ; b) de modo que verifiquen:

$a + b > 8$ pues dichos elementos le pertenecerán al conjunto R.

$$\therefore \quad R = \{(5 ; 4), (7 ; 3), (7 ; 4)\}$$



Observación

Si R es una relación de A en B entonces al conjunto A se le da el nombre de conjunto de partida y al conjunto B se le llama conjunto de llegada.

2.1B) Dominio y Rango.

I) Dominio de R(D_R).- Es el conjunto que tiene por elementos a todas las primeras componentes de los pares ordenados pertenecientes a la relación, es decir:

$$\text{Dom}(R) = D_R = \{a / (a ; b) \in \mathbf{R}\}$$

II) Rango de R (R_R).- Es el conjunto que tiene por elementos a todos las segundas componentes de los pares ordenados pertenecientes a la relación, es decir:

$$\text{Ran}(R) = R_R = \{b / (a ; b) \in \mathbf{R}\}$$

Ejercicio 7

Halle el dominio y el rango de la relación R: A→B, definida por:

$$R = \{(x ; y) / x \in A \ \wedge \ y \in B \wedge x \leq y\}$$

Donde: $A = \{2, 3\}$ y $B = \{-2 , 2, 4\}$

Resolución:

Hallemos A × B según la definición.

$$A \times B = \{2, 3\} \times \{-2, 2, 4\} = \{(2 ; -2), (2 ; 2), (2 ; 4), (3 ; -2), (3 ; 2), (3 ; 4)\}$$



Ahora R viene dado por: $R = \{(2;2), (2;4), (3;4)\}$

Finalmente el dominio y rango de R serán:

$$D_R = \{2, 3\} \ \wedge \ R_R = \{2, 4\}$$

2.2. Clases de Relaciones

Siendo R una relación de A en A (relación en A) ésta podrá ser de las siguientes clases.

2.2A) Relacion Reflexiva.

Si la relación R es reflexiva se deberá cumplir lo siguiente:

$$\forall x \in A \implies (x;x) \in R$$

2.2B) Relacion Simétrica.

Si la relación R es simétrica se deberá cumplir lo siguiente:

$$(x;y) \in R \implies (y;x) \in R$$

2.2C) Relacion Transitiva.

Si la relación R es transitiva se deberá cumplir lo siguiente:

$$(x;y) \in R \wedge (y;z) \in R \implies (x;z) \in R$$

2.2D) Relacion de Equivalencia.

Una relación R se llama relación de equivalencia si y solamente si es reflexiva, simétrica y transitiva a la vez.

Ejercicio 8

Dado el conjunto $A = \{2, 4, 6\}$ se define una relación R de A en A de la manera siguiente:

$$R = \{(2;2), (2;4), (4;4), (6;6), (4;2)\}$$

Averiguar si R es una relación de equivalencia.

Resolución:

Se sabe que si la relación R es de equivalencia, ésta debera ser reflexiva, simétrica y transitiva a la vez, luego será necesariio analizar cada uno de estos casos:

Reflexiva: $\forall x \in A \implies (x\,;x) \in R$, veamos

$2 \in A \implies (2\,;2) \in R$ ¡correcto!

$4 \in A \implies (4\,;4) \in R$ ¡correcto!

$6 \in A \implies (6\,;6) \in R$ ¡correcto!

Evidentemente R es reflexiva.

Simétrica: $(x\,;y) \in R \implies (y\,;x) \in R$, veamos

$(2\,;4) \in R \implies (4\,;2) \in R$ ¡correcto!

Evidentemente R es simétrica.

Transitiva: $(x\,;y) \in R \wedge (y\,;z) \in R \implies (x\,;z) \in R$, veamos

$(2\,;2) \in R \wedge (2\,;4) \in R \implies (2\,;4) \in R$ ¡correcto!

$(2\,;4) \in R \wedge (4\,;4) \in R \implies (2\,;4) \in R$ ¡correcto!

$(2\,;4) \in R \wedge (4\,;2) \in R \implies (2\,;2) \in R$ ¡correcto!

Evidentemente R es transitiva.

$\therefore$ **R es una relación de equivalencia**

2.3. Relaciones de R en R

2.3A) Definición

Sea R una relación de A en B (R: A→B), si A y B son subconjuntos del conjunto de los números reales **R**, se dice que R es una relación de R en **R**, es decir $R \subset \mathbf{R}^2$.

2.3B) Dominio y Rango

I) Dominio.- Es el conjunto cuyos elementos son los valores reales que asume la variable independiente x (primera componente).

II) Rango.- Es el conjunto cuyos elementos son los valores reales que asume la variable dependiente **y** (segunda componente)



2.3C) Cálculo del Dominio y Rango.

Sea R una relación de **R** en **R** definida mediante una fórmula (regla de correspondencia) tenemos:

I) Obtención del Dominio.-Para determinar el dominio maximal (dominio máximo) de la relación, se deberá despejar la variable **y** de la condición dada (fórmula), el dominio de la relación será el conjunto cuyos elementos son todos los valores que pueda tomar la variable x de tal modo que **y** sea un número real.

II) Obtención del Rango.- Para determinar el rango se despeja la variable x de la condición dada, el rango de la relación será el conjunto cuyos elementos son todos los valores que pueda tomar la variable **y** de tal modo que x sea un número real.

Ejercicio 9

Dada la relación: $R = \{(x\,;\,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \,/\, xy + 3y = 2\}$. Encontrar su dominio y rango.

Resolución:

La regla de correspondencia dada es: $xy + 3y = 2$

Despejamos **y** para hallar el dominio: $y = \dfrac{2}{x+3}$

Por condición de existencia tenemos: $y = \dfrac{2}{x+3} \in \mathbf{R} \iff x + 3 \neq 0 \implies x \neq -3$

Luego los valores que asume x son todos los reales excepto – 3.

$$\therefore \quad \mathrm{Dom}(R) = D_R = \mathbf{R} - \{3\}$$

Ahora hallemos el rango, para lo cual será necesario despejar x de la regla de correspondencia, veamos.

$$xy + 3y = 2 \quad \implies \quad x = \frac{2-3y}{y}$$

Por condición de existencia tenemos: $x = \dfrac{2-3y}{y} \in \mathbf{R} \iff y \neq 0$

Luego los valores que asume **y** son todos los reales excepto: 0

$$\therefore \quad \mathrm{Ran}(R) = R_R = \mathbf{R} - \{0\}$$

2.4. Gráfica de una relación de R en R

La gráfica de una relación de **R** en **R** es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen dicha relación. Una relación puede tener la forma de una ecuación : $F(x ; y) = 0$ ó de alguna inecuación $F(x ; y) < 0$; $F(x ; y) \leq 0$; $F(x ; y) > 0$; $F(x ; y) \geq 0$.

Debemos tener en cuenta que las relaciones de la forma: $F(x ; y) = 0$ representan gráficas de alguna recta o curva; mientras que las relaciones definidas por alguna inecuación representan gráficas de planos o semiplanos.

2.4A) Criterios para gráficar una relación

Para efectuar la gráfica de una relación R definida por la condición $F(x ; y) = 0$, debemos ejecutar los siguientes pasos:

1º Encontrar el dominio de la relación y de ser posible el rango . El producto cartesiano de estos dos conjuntos determinará la extensión de la curva.

2º Encontrar las intersecciones con los ejes coordenados:

- Para encontrar la intersección de la curva con el eje x, se hace $y = 0$, en la condición dada y se resuelve la ecuación resultante para x. Los puntos de intersección de la curva con el eje x son de la forma: $(x ; 0)$
- Para encontrar la intersección de la curva con el eje **y**, se hace $x = 0$, en la condición dada y se resuelve la ecuación resultante para **y**. Los puntos de intersección de la curva con el eje **y** son de la forma: $(0 ; y)$

3º Encontrar la simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados y al origen:

- La simetría con respecto al eje x se presenta al sustituir **y** por **–y** en la condición dada: $F(x ; y) = 0$, verificándose que ésta no varia. De variar la condición no existirá simetría con respecto al eje x.
- La simetría con respecto al eje **y** se presenta al sustituir x por $-x$ en la condición dada: $F(x ; y) = 0$, verificándose que ésta no varia. De variar la condición no existirá simetría con respecto al eje **y**.
- La simetría con respecto al origen de coordenadas se presenta al sustituir simultáneamente **y** por **–y** y x por $-x$ en la condición dada $F(x ; y) = 0$, verificándose que ésta no varía. De variar la condición no existirá simetría con respecto al origen de coordenadas.



Observación

Si una curva es simétrica con respecto a uno de los ejes x o y, dicho eje se comporta como si fuese un espejo para la curva, veamos algunos ejemplos:



Simetría con respecto al eje y.	Simetría con respecto al eje x.	Simetría con respecto al origen de coordenadas.

4º Encontrar "si existen" las asíntotas de la curva. Llamaremos asíntotas de una curva a la recta L tangente a la curva cuando x crece ilimitadamente o cuando x se aproxima a un valor determinado.

- **Asíntotas verticales:** Se obtienen cuando de la condición: $F(x\,;y)=0$ se despeja la variable **y**, es decir se consigue: $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y se resuelve la ecuación: $Q(x)=0$.

  Las asíntotas verticales serán de la forma: $x=x_0$

- **Asíntotas Horizontales:** Se obtienen cuando de la condición: $F(x\,;y)=0$, se despeja la variable x es decir se consigue: $x=\dfrac{M(y)}{N(y)}$ y se resuelve la ecuación: $N(y)=0$

La asíntotas horizontales serán de la forma: $y=y_0$

5º Luego de haber ejecutado todos los pasos anteriores se procede a contruir la gráfica de la relación considerando unos cuantos puntos que deben satisfacer la condición: $F(x\,;y)=0$

Ejercicio 10

Graficar la relación R definida por: $R=\{(x\,;y)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\,/\,xy-2x-y=0\}$

Resolución:

La condición dada es: $xy-2x-y=0$, la cual se podrá expresar así: $F(x\,;y)=0$

Donde: $F(x\,;y)=xy-2x-y$

1º Hallemos el dominio y el rango de la relación.

- **Para el dominio:** $xy - 2x - y = 0 \implies y = \dfrac{2x}{x-1}$

$$y = \frac{2x}{x-1} \in \mathbf{R} \iff x - 1 \neq 0 \implies x \neq 1$$

$$\therefore \boxed{\text{Dom}(R) = \mathbf{R} - \{1\}}$$

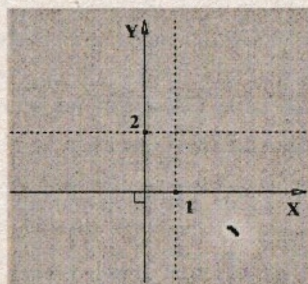
- **Para el rango:** $xy - 2x - y = 0 \implies x = \dfrac{y}{y-2}$

$$x = \frac{y}{y-2} \in \mathbf{R} \iff y - 2 \neq 0 \implies y \neq 2$$

$$\therefore \boxed{\text{Ran}(R) = \mathbf{R} - \{2\}}$$

Finalmente podemos apreciar que la curva se extiende a lo largo de:

$\text{Dom}(R) \times \text{Ran}(R) = (\mathbf{R} - \{1\}) \times (\mathbf{R} - \{2\})$, dicho producto cartesiano es todo el plano $\mathbf{R}^2$ excepto las rectas; $x = 1 \wedge y = 2$, en consecuencia la gráfica de la relación se extiende por todo el plano $\mathbf{R}^2$ excepto las rectas: $x = 1 \wedge y = 2$.



2º Hallemos la intersección de la curva con los ejes coordenados.

- **con el eje x:** Hagamos $y = 0$ en la condición

$$xy - 2x - y = 0 \implies 0 - 2x - 0 = 0 \implies x = 0$$

luego el punto de intersección será: (0 ; 0)

- **con el eje y:** Hagamos $x = 0$ en la condición

$$xy - 2x - y = 0 \implies 0 - 0 - y = 0 \implies y = 0$$

luego el punto de intersección será: (0 ; 0)

3º Analicemos la simetría considerando $F(x\,;\,y) = xy - 2x - y$

- **simetría respecto al eje x si y solo si:** $\mathbf{F(x\,;\,y) = F(x\,;\,-y)}$



Se tiene: $F(x\,;y) = xy - 2x - y \implies F(x\,;-y) = -xy - 2x + y$

observar que: $F(x\,;y) \neq F(x\,;-y)$ ¡No existe simetría!

-simetría respecto al eje y si y solo si: $F(x\,;y) = F(-x\,;y)$

Se tiene: $F(x\,;y) = xy - 2x - y \implies F(-x\,;y) = -xy + 2x - y$

observar que: $F(x\,;y) \neq F(-x\,;y)$ ¡No existe simetría!

- simetría respecto al origen si y solo si: $F(x\,;y) = F(-x;-y)$

Se tiene: $F(x\,;y) = xy - 2x - y \implies F(-x\,;-y) = xy + 2x + y$

observar que: $F(x\,;y) \neq F(-x\,;-y)$ ¡No existe simetría!

4º Búsqueda de las asíntotas.

-Para la asíntota vertical: $y = \dfrac{2x}{x-1} \implies x - 1 = 0 \implies x = 1$

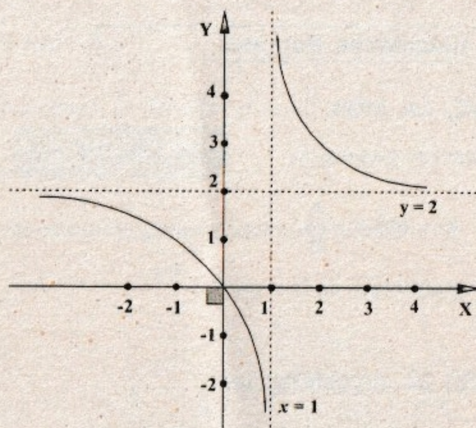
luego $x = 1$ es la asíntota vertical.

- Para la asíntota horizontal: $x = \dfrac{y}{y-2} \implies y - 2 = 0 \implies y = 2$

luego y = 2 es la asíntota horizontal

5º Construcción de la gráfica:

x	$y = \dfrac{2x}{x-1}$
−2	4/3
−1	1
0	0
1/2	− 2
2	4
3	3
4	8/3



2.4B) Criterio práctico para graficar relaciones definidas por inecuaciones (zonas sombreadas)

Dada alguna relación de la forma: $F(x\,;y) < 0$; $F(x\,;y) \leq 0$; $F(x\,;y) > 0$; $F(x\,;y) \geq 0$

su gráfica corresponde a una región sombreada, la misma que será obtenida mediante los siguientes pasos.

Primero: Expresar la inecuación dada, según la siguiente desigualdad:

a) y > (expresión en x)

b) y < (expresión en x)

La gráfica de la región estará limitada por el borde de una curva determinada por la ecuación: y = (expresión en x)

Segundo: Reconocimiento de la zona a sombrear:

a) Para la inecuación; x > (expresión en x), la zona sombreada resulta ser parte del plano limitado inferiormente por el borde de la curva determinada por la ecuación; y = (expresión en x), sin incluir dicho borde.

b) Para la inecuación; y < (expresión en x), la zona sombreada resulta ser la parte del plano limitado superiomente por el borde de la curva determinada por la ecuación; y = (expresión en x) sin incluir el borde.



Observación

Si en (a) o en (b) se sustituye el signo de relación simple por su respectivo signo doble (> por ≥, o, < por ≤) en la gráfica de la región se deberá incluir el borde.

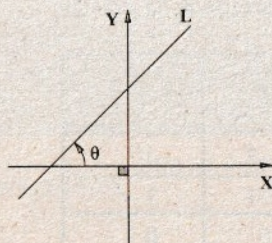
2.5. Relaciones Notables

2.5A) La recta:

Ecuación general L: $Ax + By + C = 0$

$$m = \text{tg}\theta = -\frac{A}{B}$$

m = pendiente de la recta L

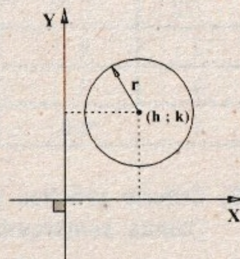


2.5B) La circunferencia:

Forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

centro = (h ; k) ; radio = r



2.5C) La Parábola:

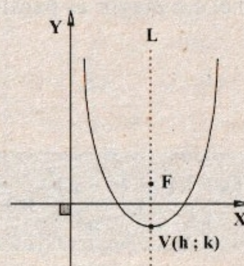
I) Eje focal L paralelo el eje y.

La ecuación es: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

V = vértice ; F = foco

Si : p > 0, la curva se abre hacia arriba

Si : p < 0, la curva se abre hacia abajo

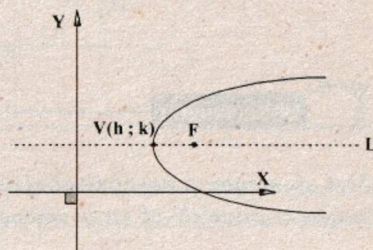


II) Eje focal L paralelo al eje x.-

La ecuación es: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

Si: p > 0, la curva se abre hacia la derecha

Si: p < 0, la curva se abre hacia la izquierda.



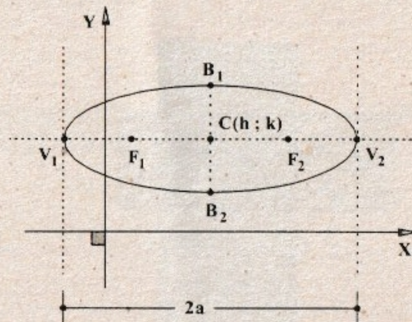
2.5D) La Elipse:

$V_1 \wedge V_2$ = Vértices; $F_1 \wedge F_2$ = Focos ; Centro (h ; k)

$$\left.\begin{array}{l} \overline{V_1V_2} = 2a \text{ (eje mayor)} \\ \overline{B_1B_2} = 2b \text{ (eje menor)} \\ \overline{F_1F_2} = 2c \text{ (eje focal)} \end{array}\right\} \text{Donde: } a^2 = b^2 + c^2$$

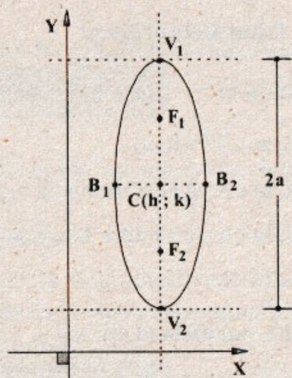
Si el eje mayor es paralelo al eje x, la ecuación general viene dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Cuando el eje mayor es paralelo al eje y, la ecuación general viene dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$





Observación

Si el eje mayor es paralelo al eje x entonces el número a se coloca debajo de x pero si el eje mayor es paralelo al eje y, entonces el número a se coloca debajo de y

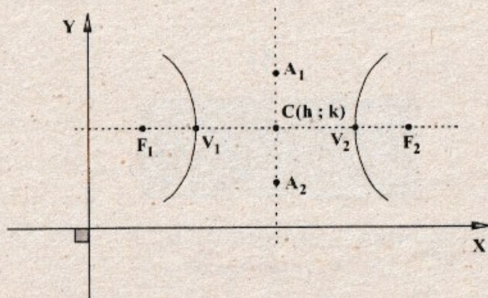
2.5E) La Hipérbola:

$V_1 \wedge V_2$ = vértices ; $F_1 \wedge F_2$ = Focos; Centro (h ; k)

$$\left.\begin{array}{l} \overline{V_1V_2} = 2a \text{ (eje transversal)} \\ \overline{A_1A_2} = 2b \text{ (eje conjugado)} \\ \overline{F_1F_2} = 2c \text{ (distancia focal)} \end{array}\right\} \quad \text{Donde: } c^2 = a^2 + b^2$$

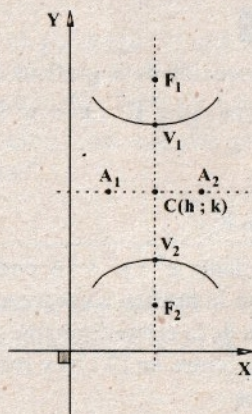
Si el eje conjugado es paralelo al eje Y, la ecuación general viene dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$





Si el eje conjugado es paralelo al eje **X**, la ecuación general viene dada por:



$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



Observación

Si el eje focal es paralelo al eje x, entonces el signo (+) afecta al término donde se encuentra x pero si el eje focal es paralelo al eje y entonces el signo (+) afecta al término donde se encuentra y.

Ejercicio 11

Halle el dominio, rango y la gráfica de la siguiente relación: $R=\{(x;y)\in \mathbf{R}^2 / |x-1|\le 2\}$

Resolución:

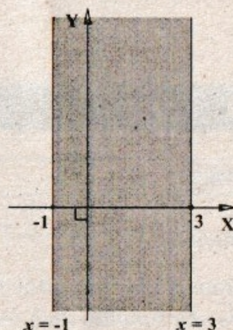
Hallemos el dominio a partir de : $|x-1|\le 2$

Por teorema se plantea lo siguiente: $-2\le x-1\le 2$

$-1\le x\le 3$

Observar que: $x\in[-1;3]$ $\therefore$ $D_R=[-1;3]$

Fácilmente podemos apreciar que el rango de la relación es el conjunto de todos los números reales, finalmente veamos la gráfica.



Ejercicio 12

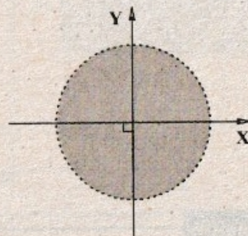
Graficar la intersección de la gráficas de las siguientes relaciones:

$$R_1 = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 < 16\} \quad \wedge \quad R_2 = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y < x^2\}$$

Resolución:

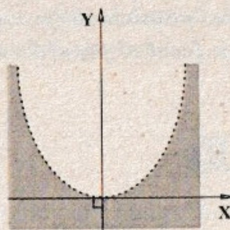
Graficando para R_1:

De la condición dada: $x^2 + y^2 < 16$, podemos apreciar que la gráfica corresponde a la parte interna de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 4^2$, de centro en (0 ; 0) y radio igual a 4, veamos.

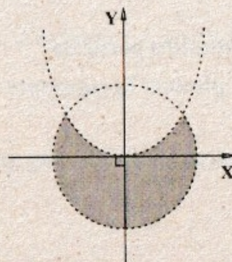


Graficando para R_2:

De la condición dada: $y < x^2$, podemos apreciar que la gráfica corresponde a la parte inferior de la parábola: $y = x^2$, de vértice en (0 ; 0) y eje focal paralelo al eje **y**, abierto hacia arriba, veamos.



Finalmente la gráfica que indica la intersección de R_1 con R_2 viene dada por.



3. FUNCIONES

3.1. Función

3.1A) Definición

Consideremos a los conjuntos no vacios A y B y una relación $F \subset A \times B$: La relación binaria F es una función de A en B si y sólo si verifica simultáneamente las siguientes

condiciones.

1° Condición de existencia. Para cada $x \in A, \exists!\ y \in B \,/\, (x\,;y) \in F$

2° Condición de unicidad. $(x\,;y) \in F \ \wedge\ (x\,;z) \in F \implies y = z$

"Una función es un conjunto de pares ordenados tales que dos pares ordenados distintos no tienen la misma primera componente"

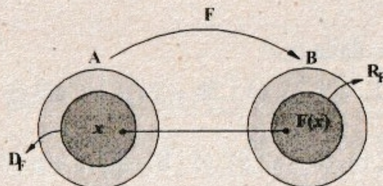


Observaciones

1. Toda función es una relación pero no toda relación es una función

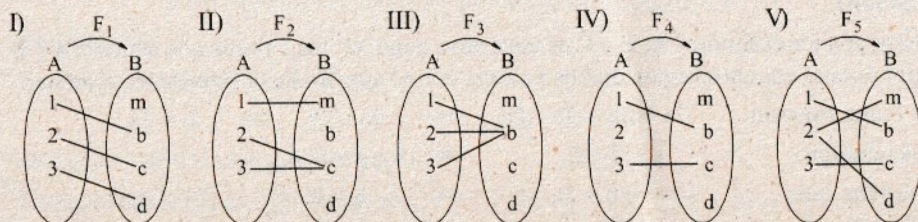
2. Si una función F va desde A hasta B, se le simboliza así: $F: A \longrightarrow B$

y gráficamente podrá ser representada por:



Ejercicio 13

De acuerdo con la definición de función, analizar a los siguientes conjuntos.



Resolución:

Para cada conjunto dado tenemos: $F_1 = \{(1\,;b), (2\,;c), (3\,;d)\}$

No es necesario que el elemento $m \in B$ sea la segunda componente de algún par ordenado $(x\,;y) \in F$ $\therefore$ F_1 es una función

$$F_2 = \{(1\,;m), \underline{(2\,;c)}, \underline{(3\,;c)}\}$$

De acuerdo con la definición F_2 es una función "si las primeras componentes son diferentes no importa como sean las segundas componentes, en este caso son iguales"

$$F_3 = \{(1 ; b), (2 ; b), (3 ; b)\}$$

Al igual que en el caso anterior se podrá afirmar que F_3 es una función:

$$F_4 = \{(1 ; b), (3 ; c)\}$$

Aún cuando al elemento $2 \in A$ no le corresponda ningún elemento de B se afirma que F_4 es una función.

$$F_5 = \{1 ; b), \underline{(2 ; m)}, \underline{(2 ; d)}, (3 ; c)\}$$

Es evidente que F_5 no es una función "condición de existencia"

Ejercicio 14

Si F representa a una función dada por:

$F = \{(3 ; 7a + 2b), (2 ; 5), (2 ; a + 2), (3 ; 5b - 2a)\}$, ¿Cuál (o cuales) de los siguientes conjuntos:

$$A = \{(a ; b), (b - a ; 5), (5 ; b - a), (a + b ; 5)\}$$
$$B = \{(3 ; b), (b ; 3), (3 ; 8), (9 ; 2a - b)\}$$
$$C = \{(3 ; 5), (9 ; 7), (b ; a), (5a ; 3b)\}$$

son funciones?

Resolución:

Para analizar a los conjuntos A, B y C es necesario conocer los valores que asumen **a** y **b**, razón por el cual encontraremos dichos valores con el auxilio de la función F, veamos:

Por ser F una función: $7a + 2b = 5b - 2a \implies 9a = 3b \implies b = 3a$

Además también: $a + 2 = 5 \implies a = 3$

como se sabe que: $b = 3a \implies b = 9$

Ahora los conjuntos A, B y C son: $A = \{(3 ; 9), (6 ; 5), (5 ; 6), (12 ; 5)\}$

$$B = \{(3 ; 9), (9 ; 3), (3 ; 8), (9 ; -3)\}$$
$$C = \{(3 ; 5), (9 ; 7), (9 ; 3), (15 ; 27)\}$$

Finalmente de acuerdo con la definición, sólo A es una función.

3.1B) Dominio y rango

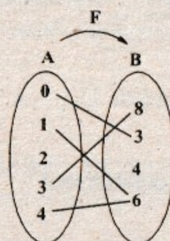
1º Dominio.-Denominado también **Pre imagen**, es el conjunto de los primeros elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de partida A.

2º **Rango.**-Denominado también **imagen, recorrido o contradominio**, es el conjunto de los segundos elementos de la correspondencia que pertencen al conjunto de llegada B.

En conclusión si: $F: A \rightarrow B$, $D_F \subset A \wedge R_F \subset B$

Ejercicio 15

Dada la relación funcional F, representada en el siguiente diagrama sagital.



Determinar la función, indicando su dominio y rango.

Resolución:

La función F viene dada por: $F = \{(0\,;3), (1\,;6), (3\,;8), (4\,;6)\}$

Donde: $D_F = \{0, 1, 3, 4\} \subset A \wedge R_F = \{3, 6, 8\} \subset B$

Ejercicio 16

Calcular " a + b" y encontrar el dominio y rango de la siguiente función.

$$F = \{(2\,, 5), (-1\,; -3), (2\,; 2a - b), (-1\,; b - a), (3 - b\,; a)\}$$

Resolución:

Por ser F una función se cumple: $2a - b = 5$ ...(1)

$b - a = -3$ ...(2)

Sumando miembro a miembro tenemos: $a = 2$ ...(3)

Reemplazando (3) en (2) obtenemos: $b - 2 = -3 \implies b = -1$

$$\therefore \quad a + b = 1$$

La función dada es : $F = \{(2\,, 5), (-1\,; -3), (4\,; 2)\}$

De donde obtenemos: $D_F = \{2, -1, 4\} \wedge R_F = \{5, -3, 2\}$

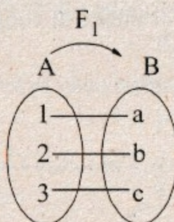
3.1C) Aplicación

La función F se denomina aplicación de A en B si todo elemento $x \in A$ sin excepción tiene asignado un elemento $\mathbf{y} \in B$ y solamente uno.

Dada la función F de A en B, $F: A \rightarrow B$

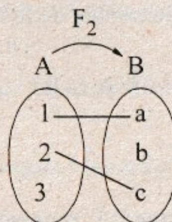
F es una aplicación de A en B si: $D_F = A$

Fig. (1)



F_1 es una aplicación $D_{F_1} = A$

Fig (2)



F_2 no es una aplicación $D_{F_2} \neq A$

3.2. Función real de variable real

3.2A) Definición:

Dada la función F: A⟶B. Si los conjuntos de partida: **A** y de llegada **B** son subconjuntos del conjunto de los números reales se dirá que **F** es una función real de variable real, debido a ello F tendrá una representación gráfica la cual es un conjunto de puntos en el plano $\mathbf{R}^2$ (plano $x$oy) generado al establecer la relación de correspondencia unívoca existente entre la variable independiente x y su imagen la variable dependiente **y**, es decir.

$$F = \{(x\,;y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \,/\, x \in D_F \wedge y = F(x)\}$$

La igualdad mostrada: y = F(x) nos expresa la regla de correspondencia de la función real F, es evidente notar que: $D_F \subset \mathbf{R} \;\; \wedge \;\; R_F \subset \mathbf{R}$.

3.2B) Teorema

Una relación $F \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ es una función real de variable real si y solo si toda recta vertical corta a la gráfica de F en un solo punto.

Fig. (1)

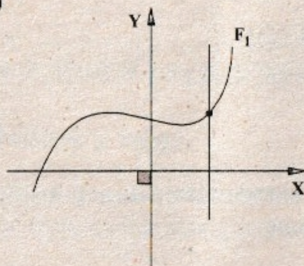


Fig (2)

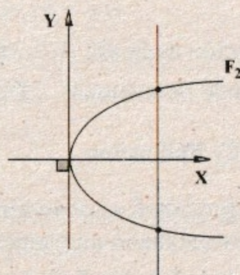


Fig (1): F_1 es la gráfica de una función. $\therefore$ F_1 es una función

Fig(2): F_2 no es la gráfica de una función $\therefore$ F_2 no es una función

 **Observación**

Una función se grafica en un sistema de coordenadas cartesianas (plano xoy) siguiendo los mismos pasos empleados para graficar relaciones, los cuales se expusieron anteriormente.

Ejercicio 17

Graficar la función F definida por: $F = \{(x ; y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ / \ y = \sqrt{4-x^2}\ \}$

Resolución:

Hallemos el dominio de la función F: $y = \sqrt{4-x^2}$

De la regla de correspondencia se tiene: $y = \sqrt{4-x^2} \in \mathbf{R} \iff 4-x^2 \geq 0$

Resolviendo la siguiente inecuación: $x^2-4 \leq 0 \iff (x+2)(x-2) \leq 0$

$$\implies x \in [-2 ; 2] \quad \therefore \quad D_F = [-2 ; 2]$$

Hallemos el rango de la función F: $y = \sqrt{4-x^2}$

De la regla de correspondencia se tiene: $\sqrt{4-x^2} \geq 0 \implies y \geq 0 \quad ...(1)$

Ahora despejando x de la relación: $y = \sqrt{4-x^2} \implies x = \sqrt{4-y^2}$

De donde se podra establecer que: $x = \sqrt{4-y^2} \in \mathbf{R} \iff 4-y^2 \geq 0$

Resolviendo la siguiente inecuación: $y^2-4 \leq 0 \iff (y+2)(y-2) \leq 0$

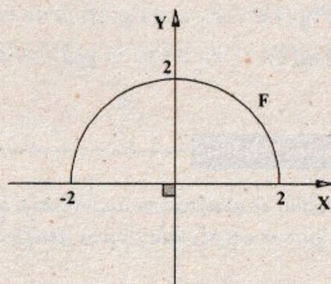
$$\implies -2 \leq y \leq 2 \quad ...(2)$$

De la intersección de (1) y (2) tenemos: $0 \leq y \leq 2 \implies y \in [0 ; 2]$

$$\therefore \quad R_F = [0 ; 2]$$

De la regla de correspondencia tenemos: $x^2 + y^2 = 2^2$

ecuación que representa a una circunferencia con centro en (0 ; 0) y radio r = 2. Asimismo debemos observar que la gráfica de la función F estará dada por aquella parte de la circunferencia que verifique:



$x \in [-2 ; 2] \quad \wedge \quad y \in [0 ; 2]$ ...... $D_F \ \wedge \ R_F$

3.3 Funciones con varias reglas de correspondencia

3.3A) Definición:

Dada una función F constituida por varias reglas de correspondencias o funciones parciales como por ejemplo.

$$F: \ y = F(x) \begin{cases} F_1(x) \ ; \ x \in D_{F_1} \\ F_2(x) \ ; \ x \in D_{F_2} \end{cases}$$

Donde $D_{F_1} \cap D_{F_2} = \phi$, se cumple:

$$D_F = D_{F_1} \cup D_{F_2} \wedge R_F = R_{F_1} \cup R_{F_2}$$


Observación

Estos resultados se extienden a funciones con tres o más funciones parciales.

Ejercicio 18

Determinar el dominio, rango y la gráfica de la función F, cuya regla de correspondencia viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} -2x + 1 \ ; x \in \langle -2 ; 2] \\ \sqrt{x-2} \ ; x \in \langle 3 ; 6 \rangle \end{cases}$$

Resolución:

La función dada es:

$$F(x) = \begin{cases} -2x + 1 \ ; x \in \langle -2 ; 2] \text{ ....} F_1 \\ \sqrt{x-2} \ ; x \in \langle 3 ; 6 \rangle \text{... ....} F_2 \end{cases}$$



I) Veamos el dominio: $D_F = D_{F_1} \cup D_{F_2} \longrightarrow D_F = \langle -2\,;2] \cup \langle 3\,;6\rangle$

II) Veamos el rango: $R_F = R_{F_1} \cup R_{F_2}$

$F_1: x \in \langle -2\,;2] \iff -2 < x \le 2$

$-4 \le -2x < 4$

$-3 \le -2x + 1 < 5$

Observar que: $R_{F_1} = [-3\,;5\rangle$

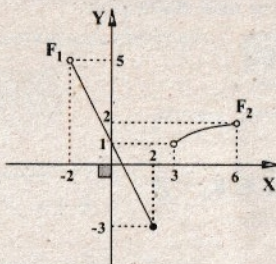
$F_2: x \in \langle 3\,;6\rangle \iff 3 < x < 6$

$1 < x-2 < 4$

$1 < \sqrt{x-2} < 2$

Observar que: $R_{F_2} = \langle 1\,;2\rangle \longrightarrow R_F = [-3\,;5\rangle \cup \langle 1\,;2\rangle = [-3\,;5\rangle$

III) Veamos la gráfica



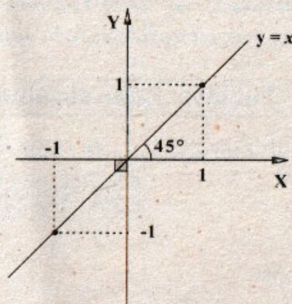
4. FUNCIONES ESPECIALES

4.1. Función identidad

Se simboliza por I, su regla de correspondencia es:

$$y = I(x) = x, \text{ es decir } y = x$$

Su dominio es $D_I = \mathbf{R}$, su rango es $R_I = \mathbf{R}$
y su gráfica viene dada por:

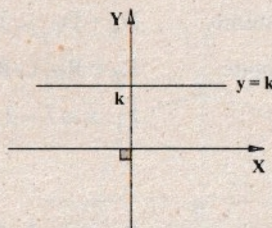


4.2. Función constante

Se simboliza por C, su regla de correspondencia es:

$$y = C(x) = k, \text{ es decir: } y = k, k \in \mathbf{R}$$

su dominio es $D_C = \mathbf{R}$, su rango es $R_C = \{k\}$ y su gráfica viene dada por:




Observación

Si $k = 0$, la función será $y = 0$, a la cual llamaremos "función nula" siendo su gráfica el eje x.

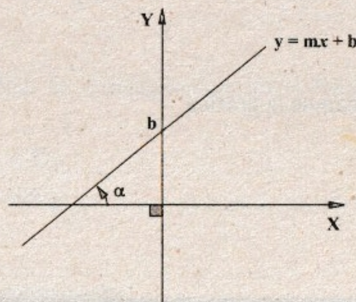
4.3. Función lineal

Su regla de correspondencia esta dada por:

$$y = F(x) = mx + b$$

Donde "m" y "b" son constantes, siendo $m \neq 0$.

Su dominio es $D_F = \mathbf{R}$, su rango es $R_F = \mathbf{R}$ y su gráfica viene dada por:




Observación

Al coeficiente "m" se le denomina pendiente de la recta generada por la ecuación: $y = mx + b$, cumpliéndose lo siguiente: $tg\alpha = m$

4.4. Función valor absoluto

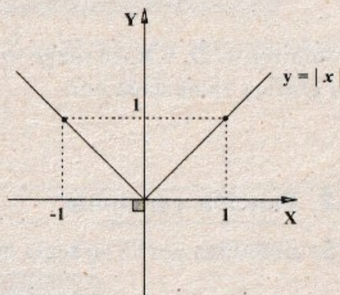
Se simboliza por $|\ \ |$, su regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = |x|$$

Es decir:

$$y = F(x) = |x| = \begin{cases} x & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ -x & ; \ x < 0 \end{cases}$$

Su dominio es $D_F = \mathbf{R}$, su rango es $R_F = [0 ; \infty\rangle$ y su gráfica viene dada por:





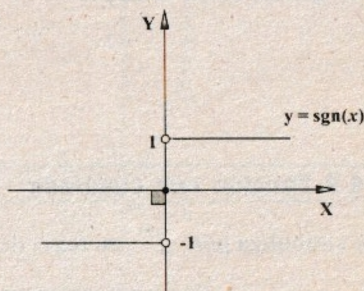
4.5. Función signo

Se simboliza por **Sgn**, su regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \text{Sgn}(x)$$

Es decir:

$$y = F(x) = \text{Sgn}(x) = \begin{cases} -1 \ ; & x < 0 \\ 0 \ ; & x = 0 \\ 1 \ ; & x > 0 \end{cases}$$



Su dominio es $D_F = \mathbf{R}$, su rango es $R_F = \{-1 ; 0 ; 1\}$
y su gráfica viene dada por.

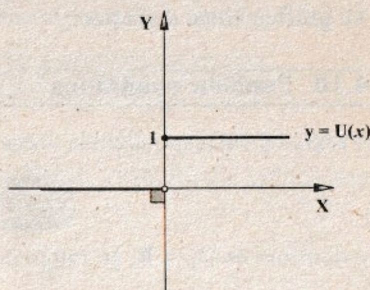
4.6. Función escalon unitario

Se simboliza por **U**, su regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = U(x)$$

Es decir :

$$y = F(x) = U(x) = \begin{cases} 0 \ ; & x < 0 \\ 1 \ ; & x \geq 0 \end{cases}$$



Su dominio es $D_F = \mathbf{R}$, su rango es $R_F = \{0 ; 1\}$
y su gráfica viene dada por

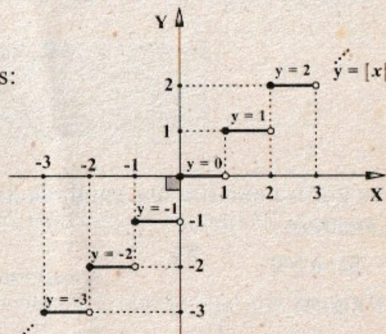
4.7. Función máximo entero

Se simboliza por $[\![\ ]\!]$, su regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = [\![x]\!]$$

Donde: $[\![x]\!] = y \iff y \leq x < y + 1 \ ; \ y \in \mathbf{Z}$

Su dominio es $D_F = \mathbf{R}$, su rango es $R_F = \mathbf{Z}$
y su gráfica viene dada por:

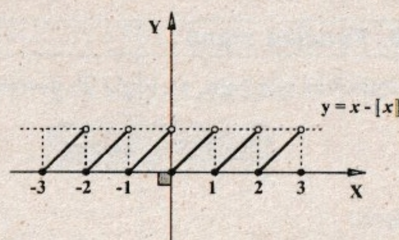


4.8. Función mantiza

Se simboliza por **Manti**, su regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \text{Manti}(x) = x - [\![x]\!]$$

Su dominio es $D_F = \mathbf{R}$, su rango es $R_F = [0\,;\,1\rangle$ y su gráfica viene dada por:

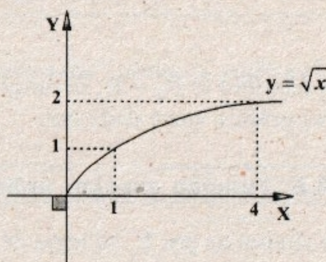


4.9 Función raíz cuadrada

Se simboliza por: $\sqrt{\ }$, su regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \sqrt{x}$$

Su dominio es $D_F = [0\,;\,\infty\rangle$, su rango es $R_F = [0\,;\,\infty\rangle$ y su gráfica viene dada por:



4.10. Función cuadrática

Su regla de correspondencia viene dada según la fórmula

$$y = F(x) = ax^2 + bx + c\,;\, a \neq 0$$

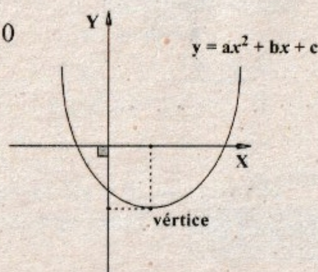
Su dominio es $D_F = \mathbf{R}$, su rango considera dos situaciones según **a**, veamos.

$$R_F = \begin{cases} \left[F\left(-\dfrac{b}{2a}\right);\infty\right\rangle & ;\ a > 0 \\ \left\langle -\infty\,;F\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right] & ;\ a < 0 \end{cases}$$

y su gráfica muestra una parábola de eje focal paralela al eje Y cuya abertura depende de **a**, veamos.

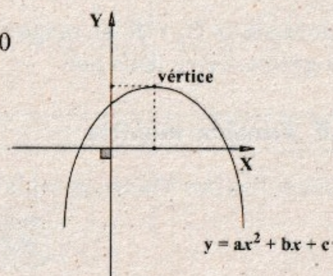
Si : $a > 0$

Fig (1)



Si : $a < 0$

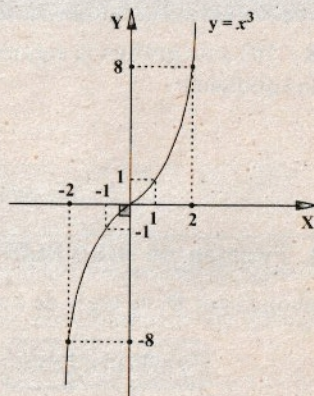
Fig (2)



E&M



4.11. Función cúbica simple



Su regla de correspondencia esta determinada según la fórmula

$$y = F(x) = x^3$$

Su dominio es $D_F = \mathbf{R}$, su rango es $R_F = \mathbf{R}$ y su gráfica viene dada por:

4.12. Función Polinómica (polinomial)

Es aquella función con dominio: $D_F = \mathbf{R}$ y regla de correspondencia igual a:

$$y = F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + ...+ a_n \ ; \ a_0 \neq 0$$

donde **n** es un número entero no negativo.

Debemos tener en cuenta que las funciones: constante, lineal, cuadrática y cúbica son casos particulares de esta función.

4.13. Función racional

Si G y H son funciones polinómicas, la función F cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \frac{G(x)}{H(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ...+ a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + ...+ b_n}$$

se denomina función racional.

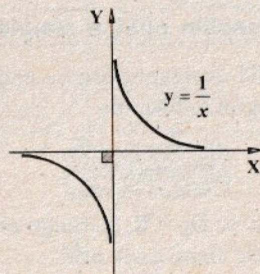
Cualquier función polinómica es una función racional, esto ocurre cuando $H(x)$ es una función constante.

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales tales que $H(x) \neq 0$

Un ejemplo típico de función racional es la función inverso multiplicativo cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \frac{1}{x} \ ; \ x \neq 0$$

siendo su dominio $D_F = \mathbf{R} - \{0\}$, su rango: $R_F = \mathbf{R} - \{0\}$ y su gráfica la siguiente hipérbola equilátera:

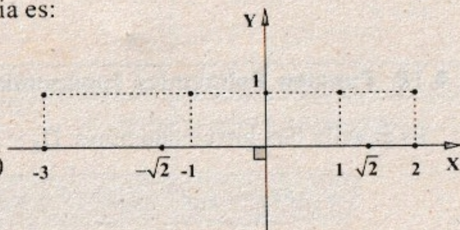


4.14. Función de DIRICHLET

Se simboliza por **D**, su regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = D(x)$$

Es decir:
$$y = D(x) = \begin{cases} 1 \ ; \ x \in Q \text{ (racional)} \\ 0 \ ; \ x \in Q' \text{ (irracional)} \end{cases}$$



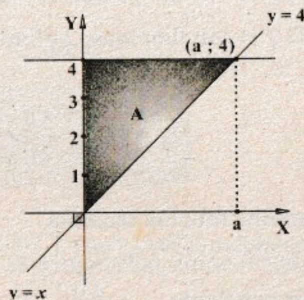
su dominio es $D_F = \mathbf{R}$, su rango es $R_F = \{0 ; 1\}$ y su gráfica viene dada por:

Ejercicio 19

Calcular el área de la región triangular que resulta de interceptar la gráfica de la función identidad con la función constante y = 4 y el eje de ordenadas.

Resolución:

De acuerdo con el enunciado podemos realizar la siguiente gráfica.



observar que el área solicitada corresponde al área que encierra un triángulo rectángulo y viene dada por:

$$A = \frac{4 \cdot a}{2} = 2a \qquad ....(1)$$

luego es necesario conocer el valor de **a**, veamos: (a ; 4) es un punto que pertenece a la función identidad: $y = F(x)$ es decir: $4 = F(a)$, pero $y = F(x) = x$ o sea $F(a) = a$, luego $a = 4$.

Finalmente en (1) tenemos: $A = 2(4)$

$$\therefore \quad A = 8\mu^2$$



5. CLASES DE FUNCIONES

5.1. Función inyectiva o univalente

5.1A) Definición:

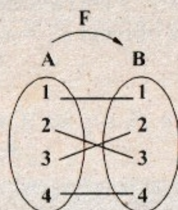
F es inyectiva si y sólo si $\forall x_1 \wedge x_2 \in D_F$ se cumple:

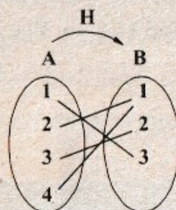
$$F(x_1) = F(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

Es decir a cada elemento del rango le corresponde un único elemento del dominio.

Ejercicio 20

Dadas las funciones numéricas representadas así.





¿Cuál de ellas es una función inyectiva?

Resolución:

La función F es: F = {(1 ; 1), (2 ; 3), (3 ; 2), (4 ; 4)}

∴ Según la definición F es inyectiva.

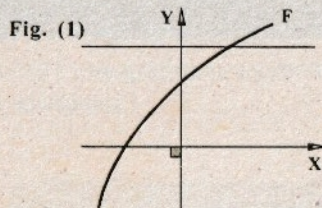
La función H es : H = {(1 ; 3), (2 ; 1), (3 ; 2), (4 ; 1)}

∴ Según la definición H no es inyectiva.

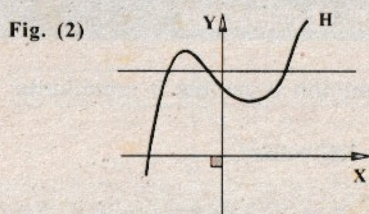
5.1B) Reconocimiento Gráfico:

Si F es una función real de variable real inyectiva entonces toda recta horizontal trazada a su gráfica la deberá interceptar en un solo punto.





F es función inyectiva



H no es función inyectiva

Ejercicio 21

Sea la función F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cuya regla de correspondencia es: $y = F(x) = x^3$ ¿Será F inyectiva?

Resolución:

De acuerdo con la defınción planteamos $\forall x_1, x_2 \in D_F / F(x_1) = F(x_2) \implies x_1 = x_2$ es decir de esta igualdad $F(x_1) = F(x_2)$ sólo debemos obtener $x_1 = x_2$, veamos:

$$F(x_1) = F(x_2)$$

$$x_1^3 = x_2^3$$

$$\sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3}$$

Recordar que: $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a \; ; \; \forall a \in \mathbf{R} \wedge n \in \mathbf{N}$

Luego tenemos: $x_1 = x_2$

$\therefore$ F es una función inyectiva

5.2. Función Suryectiva, Sobreyectiva o Epiyectiva

5.2A) Definición:

Dada la función F tal que F: $A \to B$, F es suryectiva si y solo si se cumple:

$$\forall y \in B, \exists x \in D_F / F(x) = y$$

Es decir el rango es igual al conjunto de llegada: $R_F = B$

Ejercicio 22

Sea la aplicación F: $\langle -1 ; 2] \to \langle 1 ; 7]$ tal que $F(x) = 2x + 3$ ¿F es suryectiva?



Resolución:

Si F es suryectiva se debe cumplir que $R_F = \langle 1 ; 7]$, veamos

Se tiene: $x \in \langle -1 ; 2] \iff -1 < x \leq 2$ .....(1)

Ahora formaremos $y = 2x + 3$ a partir de la relación (1)

$$-1 < x \leq 2$$
$$-2 < 2x \leq 4$$
$$1 < 2x + 3 \leq 7$$
$$1 < y \leq 7 \iff y \in \langle 1 ; 7]$$

De donde podemos observar que $R_F = \langle 1 ; 7]$

$\therefore$ **F es suryectiva**

5.3. Función biyectiva

5.3A) Definición:

Dada una función F tal que F: A→B, F es biyectiva si y solamente si es inyectiva y suryectiva a la vez.

6. FUNCIONES NOTABLES

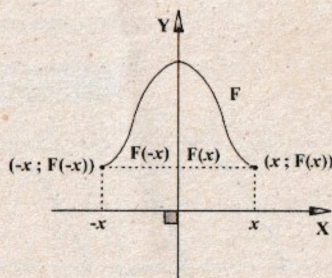
6.1. Función par

6.1A) Definición:

F es par si verifica la relación: $F(-x) = F(x)$; $x \wedge -x : D_F$

6.1B) Reconocimiento gráfico:

Si F es una función par, su gráfica es simétrica respecto al eje y.



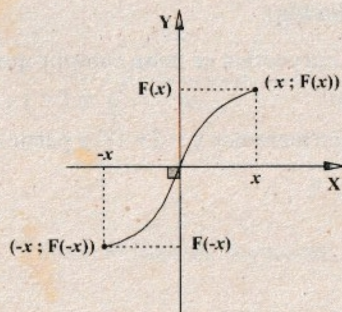
6.2. Función impar

6.2A) Definición:

F es impar si verifica la relación: $F(-x) = -F(x)$, $x \wedge -x \in D_F$

6.2B) Reconocimiento gráfico:

Si F es una función impar, su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.



6.3. Función periódica

6.3A) Definición:

F es periódica si existe un número real $T \neq 0$ denominado periódo de modo que se verifique simultáneamente:

I) $x \in D_F \longrightarrow (x+T) \in D_F$

II) $F(x+T) = F(x), \quad \forall x \in D_F$

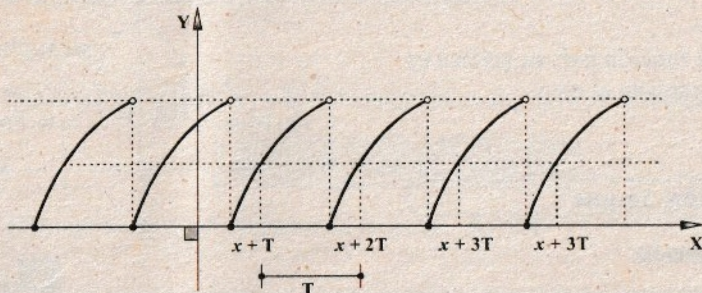
6.3B) Reconocimiento gráfico:

Toda función periódica tiene su gráfica de tal modo que la misma forma que tiene en un intervalo de longitud T se repite horizontalmente y periodicamente en el anterior y en el siguiente intervalo de longitud T.



Observación

Si T es el periódo de F, también 2T, 3T, 4T,.... son periódos de F. Al menor valor positivo de T se le denomina periodo mínimo de F.



Esxisten funciones periódicas cuyo periódo no se puede determinar, un ejemplo concreto es la función constante.

Ejercicio 23

La función $F: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \dfrac{3^{x} + 3^{-x}}{2}$. ¿Es par o impar?

Resolución:

Observar que el dominio de la función es el conjunto de los números reales ($D_F = \mathbf{R}$), ahora veamos si es par o impar

I) $x \in D_F \quad \longrightarrow \quad -x \in D_F$ ¡correcto!.

Porque si existe $x \in \mathbf{R}$ entonces existe $(-x) \in \mathbf{R}$

II) $F(-x) = \dfrac{3^{-x} + 3^{-(-x)}}{2} = \dfrac{3^{-x} + 3^{x}}{2}$

Como $F(-x) = F(x)$

$\therefore$ **La función es par**

Ejercicio 24

La función $F: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = 9$. ¿Es periódica?

Resolución:

Si F es periódica de periodo $T \neq 0$ se debe cumplir:

I) $x \in D_F \quad \longrightarrow \quad (x + T) \in D_F$

Observar que el dominioo de la función es el conjunto de los números reales ($D_F = \mathbf{R}$) es decir $x \in \mathbf{R}$ con lo cual $(x + T) \in \mathbf{R}$.

II) $F(x + 7) = F(x) \quad ; \quad \forall\, x \in D_F$

$F(x) = 9 \quad \longrightarrow \quad F(x + T) = 9$, es decir $F(x) = F(x + T)$

$\therefore$ **F es periódica**

6.4. Consideraciones adicionales

6.4A) Teorema:

Toda función F definida en $\mathbb{R}$ se puede expresar como una adición de dos funciones, una par y la otra impar.

Demostración:

Sea F: $y = F(x); x \in \mathbb{R}$

Según la regla reflexiva:

$$F(x) = F(x)$$

Según la regla multiplicativa:

$$2F(x) = 2F(x)$$
$$2F(x) = F(x) + F(x)$$

Según el elemento neutro aditivo:

$$2F(x) = F(x) + F(x) + 0$$
$$2F(x) = F(x) + F(x) + F(-x) - F(-x)$$

Según la regla conmutativa:

$$2F(x) = F(x) + F(-x) + F(x) - F(-x)$$

Según la regla asociativa:

$$2F(x) = [F(x) + F(-x)] + [F(x) - F(-x)]$$

Según la regla multiplicativa:

$$F(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)] + \frac{1}{2}[F(x) - F(-x)]$$

Ahora consideremos que:

$$G(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)] \wedge H(x) = \frac{1}{2}[F(x) - F(-x)]$$

Analizando a la función G:

$$G(-x) = \frac{1}{2}[F(-x) + F(x)]$$
$$G(-x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)]$$
$$G(-x) = G(x)$$

Aquí reconocemos que G es una función par.

Analizando a la función H:

$$H(-x) = \frac{1}{2}[F(-x) - F(x)]$$
$$H(-x) = \frac{1}{2}[-\{F(x) + F(-x)\}]$$
$$H(-x) = -\frac{1}{2}[F(x) - F(-x)]$$
$$H(-x) = -H(x)$$

Aquí reconocemos que H es una función impar.

Por lo tanto se concluye que si F es una función definid en $\mathbb{R}$ tal que F = G + H, G es par y H es impar.

$$G(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)] \wedge H(x) = \frac{1}{2}[F(x) - F(-x)] ; \forall x \in \mathbb{R}$$

6.4B) Propiedad:

Existen infinitas funciones que son par e impar a la vez, todas estas se originan a partir de la función nula.

Demostración:

Sea la función, con dominio simétrico, F.

Si F es par se cumple que:

$$F(-x) = F(x) \text{ ....(1)}$$

Si F es impar se cumple que:

$$F(-x) = -F(x) \text{ ....(2)}$$

Efectuando (1) – (2) tenemos:

$$0 = 2F(x)$$
$$0 = F(x)$$
$$F(x) = 0$$

Nótese que si $x \in \mathbb{R}$ estamos frente a la función nula que desde ya es par e impar, pero a partir de ella podemos considerar otras funciones que también son par e impar a la vez. Por ejemplo.

$$f(x) = 0 ; x \in \langle -10 ; -3\rangle \cup \langle 3 ; 10\rangle$$
$$g(x) = 0 ; x \in \langle -4 ; -1] \cup [\quad ; 4\rangle$$
$$h(x) = 0 ; x \in \langle -\infty ; -7\rangle \cup \langle 7 ; \infty\rangle$$
$$\vdots$$

Por lo tanto se concluye que existen infinitas funciones que son par e impar a la vez, pero todas se originan de la función nula.

7. FUNCIONES ACOTADAS

7.1. Función acotada inferiormente

7.1A) Definición:

Sea F una función real de variable real y **m** $\in \mathbb{R}$, se dice que F es acotada inferiormente si y solo si existe un número real **m** tal que $F(x) \geq$ **m**; $\forall x \in Dom(F)$.

7.2. Función acotada superiormente

7.2A) Definición: Sea F una función real de variable real y $M \in \mathbb{R}$, se dice que F es acotada superiormente si y solo si existe un número real M tal que $F(x) \leq M$; $\forall x \in Dom(F)$.

7.3. Función acotada

7.3A) Definición: Si F es una función real de variable real acotada inferiormente y superiormente a la vez, se dice que F es una función acotada

F es acotada si $\exists m, M \in \mathbb{R} \mid m \leq F(x) \leq M$; $\forall x \in Dom(F)$



Observación

La última definición también es equivalente con $|F(x)| \leq c$, donde c es el mayor elemento del conjunto $\{|m|, |M|\}$.

Ejercicio 25

Averiguar si la función real de variable real F definida por la regla $F(x)=\frac{x^2+4}{x^2+1}$ es acotada.

Resolución

De acuerdo con la teoría examinemos al rango, para lo cual:

$$x^2 \geq 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2+1 \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2+1 < \infty$$

$$0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{x^2+1} \leq 3$$

$$0+1 < 1+\frac{3}{x^2+1} \leq 3+1 \Leftrightarrow 1 < \frac{x^2+4}{x^2+1} \leq 4$$

$$1 < F(x) \leq 4 \Leftrightarrow |F(x)| \leq 4$$

$\therefore$ F es una función acotada

8. FUNCIONES MONÓTONAS

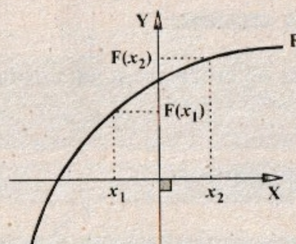
8.1. Definiciones

8.1A) Función creciente:

F es creciente si para cada $x_1 \wedge x_2 \in D_F$ se veifica:

$$x_1 < x_2 \longrightarrow F(x_1) < F(x_2)$$

Gráficamente:

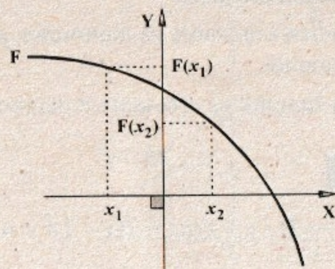


8.1B) Función decreciente:

F es decreciente si para cada $x_1 \wedge x_2 \in D_F$ se verifica

$$x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad F(x_1) > F(x_2)$$

Gráficamente:

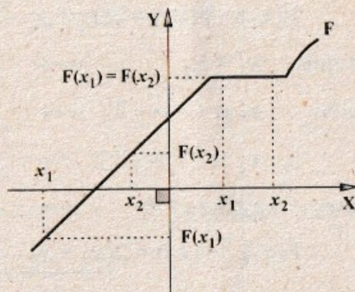


8.1C) Función no decreciente:

F es no decreciente si para cada $x_1 \wedge x_2 \in D_F$ se verifica

$$x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2)$$

Gráficamente:

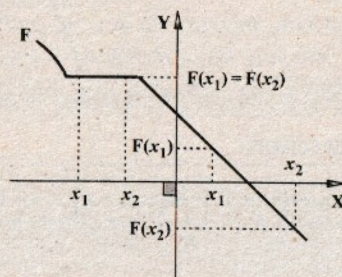


8.1D) **Función no creciente:**

F es no creciente si para cada $x_1 \wedge x_2 \in D_F$ se verifica

$$x_1 < x_2 \longrightarrow F(x_1) \geq F(x_2)$$

Gráficamente:



8.2. Propiedades

8.2A) La función constante es monótona, pues se puede considerar como no creciente o no decreciente.

8.2B) Si una función es creciente o decreciente, dicha función es inyectiva.

Ejercicio 26

La función F: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ / $y = F(x) = 2(x-3)^2 + 4$. ¿Es monótona en $\langle -\infty ; 3\rangle$?

Resolución:

Según la definición: $\forall x_1 \wedge x_2 \in \langle -\infty ; 3\rangle$. Debemos analizar el signo de $F(x_1) - F(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$, veamos:

$$F(x_1) - F(x_2) = [2(x_1-3)^2 + 4] - [2(x_2-3)^2 + 4]$$

$$F(x_1) - F(x_2) = 2(x_1-3)^2 - 2(x_2-3)^2 = 2[(x_1-3)^2 - (x_2-3)^2]$$

$$F(x_1) - F(x_2) = 2(x_1 + x_2 - 6)(x_1 - x_2)$$

Tener en cuenta que: $x_1 < x_2 \longrightarrow x_1 - x_2 < 0$

Así mismo también: $x_1 \in \langle -\infty ; 3\rangle \longrightarrow x_1 < 3$

$x_2 \in \langle -\infty ; 3\rangle \longrightarrow x_2 < 3$

De donde tenemos: $x_1 + x_2 < 6 \longrightarrow x_1 + x_2 - 6 < 0$

$$F(x_1) - F(x_2) = 2\underbrace{(x_1 + x_2 - 6)}_{(-)}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{(-)} > 0$$



$$F(x_1) - F(x_2) > 0 \quad \longrightarrow \quad F(x_1) > F(x_2)$$

Es decir con: $x_1 < x_2$

Hemos conseguido: $F(x_1) > F(x_2)$

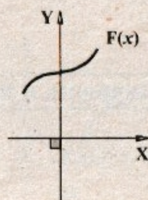
$$\left.\begin{array}{r} x_1 < x_2 \\ F(x_1) > F(x_2) \end{array}\right\} \quad x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad F(x_1) > F(x_2)$$

$\therefore$ **La función es monótona (decreciente)**

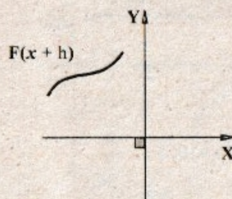
9. DESPLAZAMIENTOS Y GIROS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

9.1. Desplazamiento horizontal

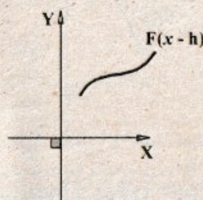
Consideremos a la gráfica de una función F y al número positivo h.



9.1A) La gráfica se desplaza "h" unidades hacia la izquierda sin perder su forma.

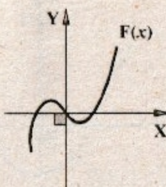


9.1B) La gráfica se desplaza "h" unidades hacia la derecha sin perder su forma.

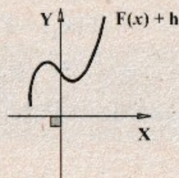


9.2. Desplazamiento vertical

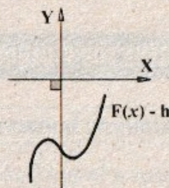
Consideremos a la gráfica de una función F y al número positivo h.



9.2A) La gráfica se desplaza "h" unidades hacia arriba sin perder su forma.

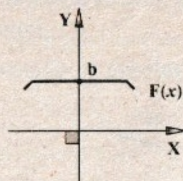


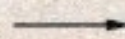
9.2B) La gráfica se desplaza "h" unidades hacia abajo sin perder su forma.

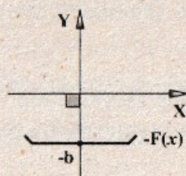


9.3. Giros con respecto a los ejes.

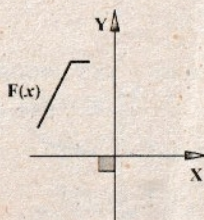
9.3A) Giro en el eje **X**.

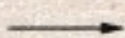


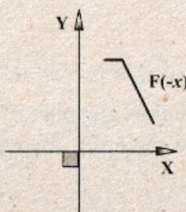




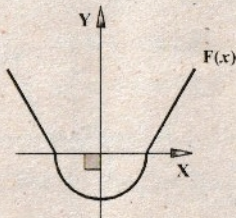
9.3B) Giro en el eje Y.

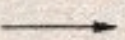


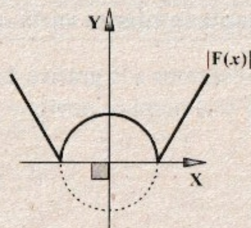




9.4. Giros por valor absoluto





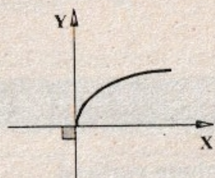


Ejercicio 27

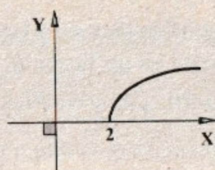
Esbozar la gráfica de la función F: **R** ⟶ **R** / $y = F(x) = \sqrt{x-2}+1$

Resolución:

Consideremos la función H tal que $H(x) = \sqrt{x}$, cuya gráfica es:



Ahora si desplazamos 2 unidades a la derecha se tendrá $H(x-2) = \sqrt{x-2}$ cuya gráfica será:



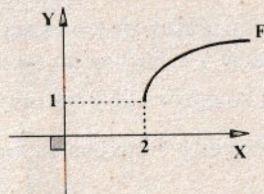
Hagamos: $H(x-2) = G(x)$

Es decir: $G(x) = \sqrt{x-2}$

Ahora desplazamos una unidad hacia arriba se tendrá:

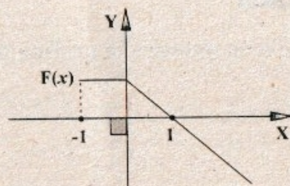
$$\underbrace{G(x)+1} = \sqrt{x-2}+1$$

$$F(x) = \sqrt{x-2}+1$$



Ejercicio 28

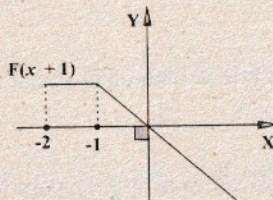
A continuación se muestra la gráfica de una función F.



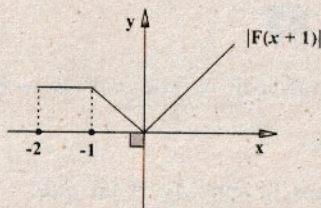
Esbozar aproximadamente la gráfica de H, donde $H(x) = |F(x+1)|$

Resolución:

Inicialmente grafiquemos $F(x+1)$, lo cual se consigue desplazando a $F(x)$ una unidad hacia la izquierda.



Ahora con el valor absoluto tenemos un giro y de este modo hemos conseguido la gráfica de H.



10. REESCALADO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

10.1. Reescalado vertical

10.1A) La gráfica de $\mathbf{y = aF(x)}$, con $a > 1$, se obtiene estirando la gráfica de $y = F(x)$ verticalmente en un factor **a**, con base en el eje de abcisas.

10.1B) La gráfica de $\mathbf{y = aF(x)}$, con $0 < a < 1$, se obtiene encogiendo la gráfica de $y = F(x)$ verticalmente en un factor $\frac{1}{a}$.

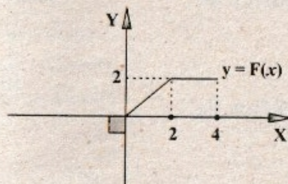
10.2. Reescalado Horizontal

10.2A) La gráfica de $\mathbf{y = F(ax)}$, con $a > 1$, se obtiene encogiendo horizontalmente la gráfica de $y = F(x)$ en un factor **a**, con base en el eje de ordenadas.

10.2B) La gráfica de $\mathbf{y = F(ax)}$, con $0 < a < 1$, se obtiene estirando horizontalmente la gráfica de $y = F(x)$ en un factor $\frac{1}{a}$.

Ejercicio 29

A continuación se muestra la gráfica de una función F:

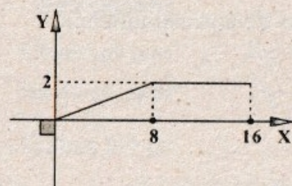


Esbozar la gráfica de la función G, donde $G(x) = 2F(\frac{1}{4}x)$

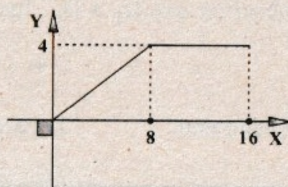
Resolución

Inicialmente graficaremos $F(\frac{1}{4}x)$, para lo cual es necesario estirar horizontalmente la gráfica de $F(x)$ en un factor 4.





Finalmente la gráfica de G se obtiene al estirar verticalmente un factor 2 la gráfica $F(\frac{1}{4}x)$, veamos:



11. IGUALDAD DE FUNCIONES

11.1. Definición

Dadas las funciones F y G, estas seran iguales si verifican simultáneamente las condiciones.

I) $D_F = D_G$ $\wedge$ II) $F(x) = G(x)$; $\forall x \in D_F = D_G$

Ejercicio 30

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I) Si: $F(x) = \dfrac{x}{x^2}$ $\wedge$ $G(x) = \dfrac{1}{x}$ entonce $F = G$

II) Si: $F(x) = \dfrac{x^2}{x}$ $\wedge$ $G(x) = x$ entonces $F = G$

Resolución:

I) Analizando dominios tenemos:

F : $y = F(x) = \dfrac{x}{x^2} \longrightarrow D_F = \mathbf{R} - \{0\}$

G: $y = G(x) = \dfrac{1}{x} \longrightarrow D_G = \mathbf{R} - \{0\}$

Además observar que: $\dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$; $x \neq 0$ $\longrightarrow$ $F(x) = G(x)$, luego $F = G$

II) Analizando dominios tenemos:

F : $F(x) = \dfrac{x^2}{x} \longrightarrow D_F = \mathbf{R} - \{0\}$

G: $G(x) = x \longrightarrow D_G = \mathbf{R}$

observar que $D_F \neq D_G$, luego ya no es necesario analizar reglas de correspondencia

$$\longrightarrow \quad F(x) \neq G(x), \text{ luego } F \neq G$$

Finalmente: I) verdadero II) falso

12. ALGEBRA DE FUNCIONES

Dadas dos funciones F y G, definidas así:

$$F: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \,/\, y = F(x), \; x \in D_F$$

$$G: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \,/\, y = G(x), \; x \in D_G$$

Tenemos:

12.1. Adición de funciones

$$(F+G): \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \,/\, y = (F+G)(x) = F(x) + G(x), x \in D_{F+G}$$

Donde : $D_{F+G} = D_F \cap D_G$

12.2. Sustracción de funciones

$$(F-G): \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \,/\, y = (F-G)(x) = F(x) - G(x), \; x \in D_{F-G}$$

Donde : $D_{F-G} = D_F \cap D_G$

12.3. Multiplicación de funciones

$$(F \cdot G): \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \,/\, y = (F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x) \;, \; x \in D_{F \cdot G}$$

Donde: $D_{F \cdot G} = D_F \cap D_G$

12.4. División de funciones

$$\left(\frac{F}{G}\right): \; \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \,/\, y = \left(\frac{F}{G}\right)(x) = \frac{F(x)}{G(x)}, \; x \in D_{F/G}$$

Donde: $D_{F/G} = D_F \cap D_G \quad \wedge \quad G(x) \neq 0$

Ejercicio 31

Dadas las funciones $F = \{(1;2), (5;3), (4;7), (8;1)\} \wedge G = \{(5;1), (8;0), (1;4)\}$

Determinar: $F+G$, $F-G$, $F \cdot G \wedge F/G$



Resolución:

Observar que: $D_F = \{1, 5, 4, 8\} \wedge D_G = \{5, 8, 1\}$

luego se tiene: $D_F \cap D_G = \{1, 5, 8\}$

I) Para F + G:

$$F + G = \{(1 ; F(1) + G(1)), (5 ; F(5) + G(5)), (8 ; F(8) + G(8))\}$$
$$F + G = \{(1 ; 2 + 4), (5 ; 3 + 1), (8 ; 1 + 0)\}$$
$$\longrightarrow \quad F + G = \{(1 ; 6), (5 ; 4), (8 ; 1)\}$$

II) Para F - G:

$$F - G = \{(1 ; F(1) - G(1)), (5 ; F(5) - G(5)), (8 ; F(8) - G(8))\}$$
$$F - G = \{(1 ; 2 - 4), (5 ; 3 - 1), (8 ; 1 - 0)\}$$
$$\longrightarrow \quad F - G = \{(1 ; -2), (5 ; 2), (8 ; 1)\}$$

III) Para F . G:

$$F \cdot G = \{(1 ; F(1) \cdot G(1)), (5 ; F(5) \cdot G(5)), (8 ; F(8) \cdot G(8))\}$$
$$F \cdot G = \{(1 ; 2 \cdot 4), (5 ; 3 \cdot 1), (8 ; 1 \cdot 0)\}$$
$$\longrightarrow \quad F \cdot G = \{(1 ; 8), (5 ; 3), (8 ; 0)\}$$

Antes de hallar F/G debemos considerar: $G(x) \neq 0$, luego $D_{F/G} = D_F \cap D_G \wedge G(x) \neq 0$

Se sabe que: $D_F \cap D_G = \{1, 5, 8\}$.

Observar que: $G(8) = 0$

Ahora tenemos: $D_{F/G} = \{1, 5\}$

$$D_{F/G} = \left\{\left(1 \; ; \; \frac{F(1)}{G(1)}\right), \left(5 \; ; \; \frac{F(5)}{G(5)}\right)\right\}$$

$$D_{F/G} = \left\{\left(1 \; ; \; \frac{2}{4}\right), \left(5 \; ; \; \frac{3}{1}\right)\right\} \longrightarrow \quad D_{F/G} = \left\{\left(1 \; ; \; \frac{1}{2}\right), (5 \; ; \; 3)\right\}$$

Ejercicio 32

Dadas las funciones F ∧ G definidas así F: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \, / \, y = F(x) = x + 2 \, , x \in \langle -2 ; 4]$

$G: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \, / \, y = G(x) = x^2 - 2 \, , x \in [1 ; 5\rangle$

Determine la función F + G y luego esbozar su gráfica.

Resolución:

Se sabe que: $D_{F+G} = D_F \cap D_G$

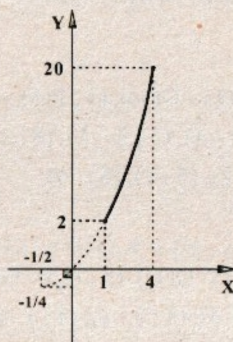
$D_{F+G} = \langle -2 ; 4] \cap [1 ; 5\rangle$

$D_{F+G} = [1 ; 4]$

Ahora tenemos: $F + G = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / y = F(x) + G(x) \wedge x \in D_{F+G}\}$

$\longrightarrow \quad F + G = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / y = x^2 + x \quad \wedge \quad x \in [1 ; 4]$

Finalmente la gráfica viene dada por:





Observación

Dada la función $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} / y = F(x), \ x \in D_F$

En busca de F^2: $F^2 = F \cdot F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} / y = (F \cdot F)(x) = F(x) \cdot F(x), \ x \in D_{F \cdot F}$

$F^2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} / y = F^2(x), \ x \in D_F$

En general $\forall n \in \mathbf{Z}^+$ se tiene $F^n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} / y = F^n(x), \ x \in D_F$

Ejercicio 33

Dadas las funciones :

$F = \{(-2 ; 3), (3 ; 5), (7 ; 0), (4 ; 3)\} \quad \wedge \quad G = \{(-5 ; 3), (-2 ; 1), (4 ; 0), (1 ; 3)\}$

Determinar : $F^2 - G^2$

Resolución:

$F^2 = \{(x ; y) / y = F^2(x) \quad \wedge \quad x \in D_F\}$

$F^2 = \{(-2 ; F^2(-2)), (3 ; F^2(3)), (7 ; F^2(7)), (4 ; F^2(4))\}$

$F^2 = \{(-2 ; (3)^2), (3 ; (5)^2), (7 ; (0)^2), (4 ; (3)^2)\}$

$\longrightarrow \quad F^2 = \{(-2 ; 9), (3 ; 25), (7 ; 0), (4 ; 9)\}$



$G^2 = \{(x ; y) / y = G^2(x) \ \wedge \ x \in D_G\}$

$G^2 = \{(-5 ; G^2(-5)), (-2 ; G^2(-2)), (4 ; G^2(4)), (1 ; G^2(1))\}$

$G^2 = \{(-5 ; (3)^2), (-2 ; (1)^2), (4 ; (0)^2), (1 ; (3)^2)\}$

$\rightarrow \quad G^2 = \{(-5 ; 9), (-2 ; 1), (4 ; 0), (1 ; 9)\}$

Observar que: $D_{F^2 - G^2} = D_{F^2} \cap D_{G^2} = D_F \cap D_G$

$D_{F^2 - G^2} = \{-2, 3, 7, 4\} \cap \{-5, -2, 4, 1\}$

$\rightarrow \quad D_{F^2 - G^2} = \{-2 , 4\}$

$F^2 - G^2 = \{(x ; y) / y = F^2(x) - G^2(x), \quad x \in D_{F^2 - G^2}\}$

$F^2 - G^2 = \{(-2 ; F^2(-2) - G^2(-2)), (4 ; F^2(4) - G^2(4))\}$

$F^2 - G^2 = \{(-2 ; 9 - 1), (4 ; 9 - 0)\}$

$\rightarrow \quad F^2 - G^2 = \{(-2 ; 8), (4 ; 9)\}$

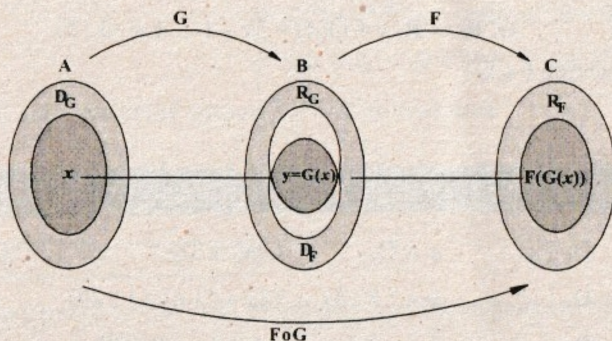
13. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

13.1. Definición

Dadas las funciones F y G, se define una tercera función llamada composición de F con G (en ese orden) denotada por F o G, de la manera siguiente.

$F \circ G = \{(x ; y) / y = (F \circ G)(x) = F(G(x)), x \in D_{F \circ G}\}$

Donde: $D_{FoG} = x \in D_G \ \wedge \ G(x) \in D_F$



Tener en cuenta que:

I) $D_{FoG} \subset D_G$ **II)** $R_G \cap D_F \neq \phi$

Ejercicio 34

Dadas las funciones $F = \{(-2\,;3), (0\,;2), (3\,;2), (4\,;6), (5\,;6), (7\,;0)\}$

$G = \{(-3\,;3), (0\,;3), (4\,;-1), (5\,;8), (7\,;8), (8\,;9), (-2\,;0)\}$

Determinar la función F o G

Resolución:

Para obtener la función F o G consideramos los siguientes pasos.

1° Reconocemos datos:

$$R_G = \{3, -1, 8, 9, 0\} \quad \wedge \quad D_F = \{-2, 0, 3, 4, 5, 7\}$$

2° Intersectamos los conjuntos R_G y D_F:

$$R_G \cap D_F = \{3, 0\}$$

3° Seleccionamos aquellos pares ordenadas de G y de F que admitan segundas y primeras componentes 3 y 0.

$$(-3\,;3) \in G \wedge (3\,;2) \in F \longrightarrow (-3\,;2) \in F \circ G$$

$$(0\,;3) \in G \wedge (3\,;2) \in F \longrightarrow (0\,;2) \in F \circ G$$

$$(-2\,;0) \in G \wedge (0\,;2) \in F \longrightarrow (-2\,;2) \in F \circ G$$

Finalmente tenemos: $F \circ G = \{(-3\,;2), (0\,;2), (-2\,;2)\}$

Ejercicio 35

Dadas las funciones $F: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = 4x + 3\ ,\ x \in \langle 11\,;20\rangle$

$G: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \,/\, y = G(x) = 3x - 1\ ,\ x \in \langle 3\,;5\rangle$

Determinar la función F o G

Resolución:

Se sabe que una función existe si su dominio es distinto del vacio, por tal razón lo primero que haremos sera encontrar el dominio de F o G, veamos:

$$D_{F\circ G}: \quad x \in D_G \quad \wedge\ G(x) \in D_F$$

$$D_{F\circ G}: \quad x \in \langle 3\,;5\rangle \wedge (3x-1) \in \langle 11\,;20\rangle$$

$$D_{F\circ G}: \quad 3 < x < 5 \quad \wedge\ 11 < 3x - 1 < 20$$

$$D_{F\circ G}: \quad 3 < x < 5 \quad \wedge\ 12 < 3x < 21$$

$D_{F\,o\,G}$: $\quad 3 < x < 5 \;\wedge\; 4 < x < 7$

$D_{F\,o\,G}$: $\quad 4 < x < 5 \;\longrightarrow\; D_{FoG} = \langle 4\,;\,5\rangle$

Observar que $D_{F\,o\,G} \neq \phi$, luego existe F o G y procedemos a obtener su regla de correspondencia.

$$F(x) = 4x + 3$$

Hagamos $x = G(x)$ $\Rightarrow$ $F(G(x)) = 4G(x) + 3$

Pero $G(x) = 3x - 1$ $\Rightarrow$ $F(G(x)) = 4(3x - 1) + 3$

$$F(G(x)) = 12x - 4 + 3 \quad\longrightarrow\quad F(G(x)) = 12x - 1$$

$$\therefore \quad F\,o\,G = \{(x\,;\,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y = F(G(x)) = 12x - 1\,,\, x \in \langle 4\,;\,5\rangle\}$$

13.2. Propiedades importantes

13.2A) En general : FoG ≠ GoF, en particular si FoG = GoF entonces F = G

13.2B) Asociativa: $(F\,o\,G)\,o\,H = F\,o\,(G\,o\,H)$

13.2C) Distributiva en adición: $(F + G)\,o\,H = F\,o\,H + G\,o\,H$

13.2D) Distributiva en multiplicación: $(F \cdot G)\,o\,H = (F\,o\,H) \cdot (G\,o\,H)$

13.2E) Para toda función F, existe la función identidad I, tal que se verifica.

$$F\,o\,I = I\,o\,F = F$$

13.2F) Con respecto a la función identidad:

$$I^n\,o\,I^m = I^{n.m} \quad ; \quad m \;\wedge\; n \in \mathbf{Z}^+$$

$$I^n\,o\,(F + G) = (F + G)^n \;\; ; \;\; n \in \mathbf{Z}^+$$

13.2G) Si F y G son inyectivas entonces F o G es inyectiva

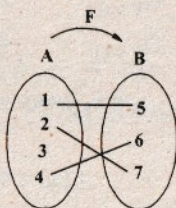
14. FUNCIÓN INVERSA

14.1. Definición 1

Dada la función inyectiva $F: A \longrightarrow B$, existe otra función llamada inversa de F denotada por $F^{-1} = F^*$ y definida asi $F^*: B \longrightarrow A$

Ejercicio 36

A continuación se muestra la función biyectiva F según el diagrama sagital.
Determinar la función inversa de F.



Resolución:

Del diagrama: $F = \{(1 ; 5), (2 , 7), (4 , 6)\}$

Por ser inyectiva $F^* = \{(5 ; 1), (7 ; 2), (6 ; 4)\}$

14.2. Definición 2

Dada la aplicación $F: A \rightarrow B$ biyectiva, tenemos:

$$F = \{(x ; F(x) / x \in D_F)\} \quad \longrightarrow \quad F^* = \{(F(x) ; x) / x \in D_F\}$$



Observación

Si $y = \mathcal{F}(x)$ es la regla de correspondencia de $\mathcal{F}$, entonces para encontrar la regla de correspondencia de $\mathcal{F}^*$ se reemplaza x por y para luego despejar y.

Ejercicio 37

Si $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / y = F(x) = 2x + 3$. Encontrar la regla de correspondencia de F^*.

Resolución:

Es evidente que F es biyectiva, luego existe F^*, por el cual procedemos a calcular su regla de correspondencia.

Para F tenemos: $y = 2x + 3$

Ahora para F^*: $x = 2y + 3 \longrightarrow x - 3 = 2y \longrightarrow y = \dfrac{x-3}{2}$

Finalmente tenemos F^*: $y = F^*(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

14.3. Teorema de unicidad de la inversa

Dada la aplicación biyectiva $F: A \rightarrow B$



Si existe una función G dada por $G: B \longrightarrow A$

Tal que se verifique simultáneamente: $G \text{ o } F = I_A \ \wedge \ F \text{ o } G = I_B$

Entonces necesariamente: $G = F^*$

14.4. Propiedades

14.4A) $D_{F*} = R_F \ \wedge \ R_{F*} = D_F$

14.4B) $(F^*)^* = F$

14.4C) $F^* \text{ o } F = I \ ; \ D_I = D_F$

$F \text{ o } F^* = I \ ; \ D_I = R_F$. Es decir: $F^*(F(x)) = x \ ; \ \forall x \in D_F$

$F(F^*(y)) = y \ ; \ \forall y \in R_F$

14.4D) $(FoG)^* = G^* \text{ o } F^*$

Ejercicio 38

Dada la función $F: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \ / \ y = F(x) = 3x + 4 \ ; \ x \in \langle 1 ; 5]$

Determinar el dominio de la función inversa de F

Resolución:

Es evidente que la función F en su dominio $\langle 1 ; 5]$ es inyectiva, luego tiene inversa denotada por F^*

Por propiedad: $D_{F*} = R_F$, con lo cual es necesario calcular el rango de F, veamos:

$$x \in \langle 1 ; 5] \iff 1 < x \leq 5$$

$$3 < 3x \leq 15$$

$$7 < 3x + 4 \leq 19$$

$$7 < y \leq 19$$

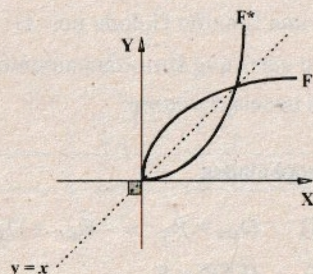
$$y \in \langle 7 ; 19] \longrightarrow R_F = \langle 7 ; 19]$$

$$\therefore \ D_{F*} = \langle 7 ; 19]$$

14.5. Propiedad referida a la gráfica

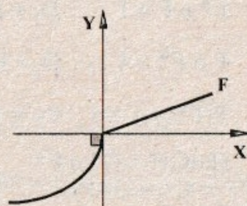
Si se conoce la gráfica de una función

inyectiva F, la gráfica de su función inversa F* se obtiene reflejando la gráfica de F en la recta indentidad



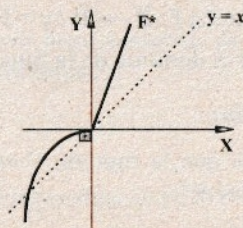
Ejercicio 39

A continuación se muestra la gráfica de una función F, esbozar la gráfica de F*, si existe.



Resolución:

Es evidente que la gráfica dada corresponde a la de una función inyectiva, luego existe la inversa de F denotada por F* cuya gráfica aproximada sera.



Ejercicio 40

Encontrar F*, si existe sabiendo que $F(x) = \sqrt{x} + 2$

Resolución:

Si F* existe, entonces F debe ser inyectiva, veamos: $y = F(x) = \sqrt{x} + 2$

Observar que: $D_F = [0 ; \infty\rangle \wedge R_F = [2 ; \infty\rangle$

$$\forall x_1 \wedge x_2 \in D_F / F(x_1) = F(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$$\sqrt{x_1} + 2 = \sqrt{x_2} + 2$$

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \longrightarrow |x_1| = |x_2|$$

Como: $x_1 \in [0 ; \infty\rangle$ entonces $|x_1| = x_1$



$$x_2 \in [0\,;\infty\rangle \text{ entonces } |x_2| = x_2$$

De donde tenemos $x_1 = x_2$

Lo cual prueba que F es inyectiva y entonces admite inversa F*

Para F: $y = \sqrt{x} + 2$

Para F*: $x = \sqrt{y} + 2$ $\qquad x - 2 = \sqrt{y} \;\longrightarrow\; y = (x-2)^2$

$$\therefore \quad F^*(x) = (x-2)^2 \;;\; x \in [2\,;\infty\rangle$$

Ejercicio 41

Determinar la inversa de F si existe, donde:

$$F = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y = F(x) = x^2 - 2x - 1,\, x \in [2\,;\infty\rangle\}$$

Resolución:

Veamos si F es inyectiva, según la definición:

$$\forall x_1 \wedge x_2 \in D_F \,/\, F(x_1) = F(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

$$x_1^2 - 2x_1 - 1 = x_2^2 - 2x_2 - 1 \;\longrightarrow\; (x_1 - 1)^2 - 2 = (x_2 - 1)^2 - 2$$

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \;\longrightarrow\; |x_1 - 1| = |x_2 - 1|$$

Como $x_1 \in [2\,;\infty\rangle$ entonces $|x_1 - 1| = x_1 - 1$

$x_2 \in [2\,;\infty\rangle$ entonces $|x_2 - 1| = x_2 - 1$

De donde tenemos: $x_1 - 1 = x_2 - 1 \;\longrightarrow\; x_1 = x_2$

Lo cual prueba que F es inyectiva y entonces admite inversa F*

Por propiedad: $D_{F*} = R_F$

$$F: \quad y = F(x) = x^2 - 2x - 1 \,;\, x \in [2\,;\infty\rangle$$

$$F: \quad y = F(x) = (x-1)^2 - 2 \,;\, x \in [2\,;\infty\rangle$$

Hallemos R_F: $\quad 2 \le x < \infty \;\longrightarrow\; 1 \le x - 1 < \infty$

$$1 \le (x-1)^2 < \infty \;\longrightarrow\; -1 \le (x-1)^2 - 2 < \infty$$

$$-1 \le y < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad y \in [-1\,;\infty\rangle$$

$$R_F = [-1\,;\infty\rangle \quad \Longrightarrow \quad D_{F*} = [-1\,;\infty\rangle$$

Hallemos F*: $\quad y = (x-1)^2 - 2 \;\longrightarrow\; x = (y-1)^2 - 2$

$$x + 2 = (y - 1)^2 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x+2} + 1 = y$$

$\therefore$ [redacted] $(x;y) \in \mathbf{R}^2 / y = F^*(x) = \sqrt{x+2}+1 \;;\; x \in$ [redacted]

Ejercicio 42

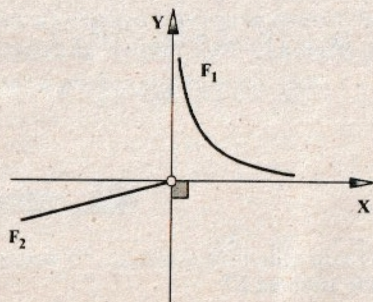
Dada la función F, donde:

$$y = F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \;;\; x \in \langle 0 \;;\; \infty \rangle & \text{.......}F_1 \\ \\ \dfrac{x}{2} \;;\; x \in \langle -\infty \;;\; 0 \rangle & \text{.......}F_2 \end{cases}$$

Determine F*, si existe.

Resolución:

Graficando la función:



Podemos apreciar que F es inyectiva, luego existe F*

$F_1: y = F(x) = \dfrac{1}{x} \;;\; D_F = \langle 0 \;;\; \infty \rangle \wedge R_F = \langle 0 \;;\; \infty \rangle$

$F_1^*: x = \dfrac{1}{y} \Longrightarrow y = \dfrac{1}{x} \; D_F^* = R_F = \langle 0 \;;\; \infty \rangle$

$F_2: y = F(x) = \dfrac{x}{2} \;;\; D_F = \langle -\infty \;;\; 0 \rangle \wedge R_F = \langle -\infty \;;\; 0 \rangle$

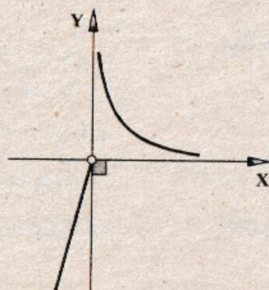
$F_2^*: x = \dfrac{y}{2} \Longrightarrow y = 2x \;;\; D_{F^*} = R_F = \langle -\infty \;;\; 0 \rangle$

Finalmente tenemos:

$$\dfrac{1}{x} \;;\; x \in \langle 0 \;;\; \infty \rangle$$

$$2x \;;\; x \in \langle -\infty \;;\; 0 \rangle$$

Cuya gráfica será:





Ejercicio 43

Dar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) Si F es creciente $\rightarrow$ F es no decreciente

II) Si F: (a ; b) $\rightarrow$ **R** es decreciente $\rightarrow R_F = [F(b), F(a)]$

III) Si F es impar $\rightarrow$ F^2 es par

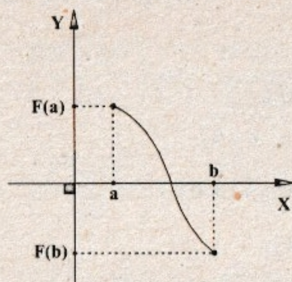
A) VVV B) VFV C) VFF D) FVV E) FVF

Resolución:

I. F es creciente $\Longleftrightarrow$ $\{\forall\, x_1, x_2 \in D_F: x_1 < x_2 \Longleftrightarrow F(x_1) < F(x_2)\}$

$F(x_1) \leq F(x_2)$ $\rightarrow$ F es no decreciente (V)

II. F: [a ; b] $\rightarrow$ **R** es decreciente, por ejemplo:



$R_F = [F(b) ; F(a)]$ (V)

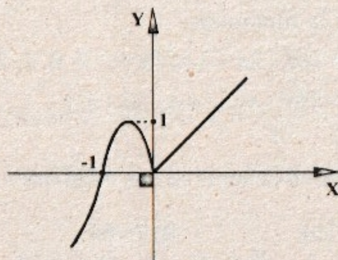
III. F es impar $\Longleftrightarrow$ $\{\forall x \in D_F : -x \in D_F \;\wedge\; F(-x) = -F(x)\}$

Para: $F^2(x)$; $D_{F^2} = D_F$ $\rightarrow$ $\forall x \in D_{F^2}$:

$-x \in D_{F^2} \wedge F^2(-x) = F(-x) \cdot F(-x) = -F(x) \cdot -F(x) = F^2(x)$ $\rightarrow$ F^2 es par (V)

$\therefore$ **VVV** **CLAVE A**

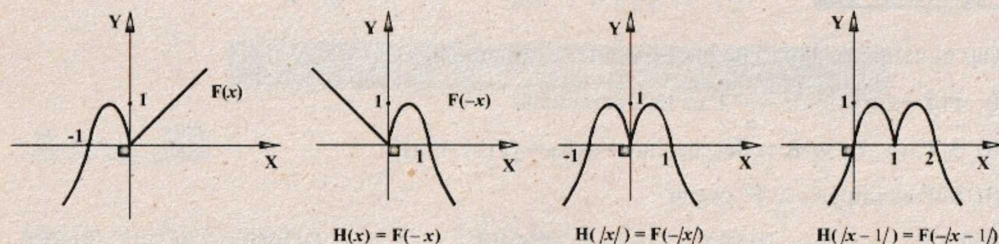
Ejercicio 44



En la figura adjunta se muestra la gráfica de F:
Determine la gráfica de $G(x) = F(-|x-1|)$.



Resolución:



H(x) = F(− x) H(/x/) = F(−/x/) H(/x − 1/) = F(−/x − 1/)

Ejercicio 45

Sea F la función definida por: $F(x)=\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{x-3}}}{|x-3|-|x-4|}$. Determinar el dominio D_F.

A) $\langle 5\,;\infty\rangle$ B) $[3\,;5\rangle$ C) $[3\,;7/2\rangle$ D) $[3\,;\infty\rangle-\{7/2\}$ E) ϕ

Resolución:

$$F(x)=\frac{\sqrt{x-\sqrt{x-3}}}{|x-3|-|x-4|}$$

$D_F=\{x\in\mathbf{R}\,/\,x-\sqrt{x-3}\geq 0\ \wedge\ |x-3|-|x-4|\neq 0\}$

$D_F=\{x\in\mathbf{R}\,/\,\sqrt{x-3}\leq x\ \wedge\ |x-3|\neq|x-4|\}$

$D_F=\{x\in\mathbf{R}\,/\,x-3\geq 0\ \wedge\ x-3\leq x^2\ \wedge\ (2x-7)(1)\neq 0\}$

$D_F=\{x\in\mathbf{R}\,/\,x\geq 3\ \wedge\ x^2-x+3\geq 0\ \wedge\ x\neq 7/2\}$

Como: $x^2-x+3>0,\ \forall x\in\mathbf{R}$

$D_F=\{x\in\mathbf{R}\,/\,x\geq 3\ \wedge\ x\neq 7/2\}$ ⟶ $D_F=[3\,;+\infty\rangle-7/2$

CLAVE: D

Ejercicio 46

Dadas la funciones:

$F=\{(x,|2x-1|)\,/\,x=-2,0,1,2,5\}$

$G=\{(x,|x|)\,/\,x\in[-1\,;3\rangle\}$

$$H(x)=\begin{cases}x^2+3\ ;\ x\leq 1\\ 2x+3\ ;\ x>1\end{cases}$$

Determine la suma de los elementos del rango de: $\dfrac{F^2+G^2}{2H}$

A) 75/168 B) 75/84 C) 221/168 D) 113/84 E) 111/84



Resolución:

$F(x) = |2x-1|\ ;\ x \in \{-2; 0 ; 1 ; 2; 5\}$

$G(x) = |x|\ ;\ x \in [-1 ; 3\rangle$

$$H(x) = \begin{cases} x^2+3\ ;\ x \le 1 \\ 2x+3\ ;\ x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Dom}\left(\frac{F^2+G^2}{2H}\right) = D_F \cap D_G \cap D_H - \{x \,/\, H(x) = 0\}$$

Pero notése que $H(x) \neq 0,\ \forall x \in D_H$, entonces:

$$\text{Dom}\left(\frac{F^2+G^2}{2H}\right) = D_F \cap D_G \cap D_H = \{-2 ; 0 ; 1 ; 2 ; 5\} \cap [-1 ; 3\rangle \cap \mathbf{R}$$

$$\text{Dom}\left(\frac{F^2+G^2}{2H}\right) = \{0 ; 1 ; 2\}$$

* Para $x = 0$: $\left(\dfrac{F^2+G^2}{2H}\right)(0) = \dfrac{F^2(0)+G^2(0)}{2H(0)} = \dfrac{1+0}{2.3} = \dfrac{1}{6}$

* Para $x = 1$: $\left(\dfrac{F^2+G^2}{2H}\right)(1) = \dfrac{F^2(1)+G^2(1)}{2H(1)} = \dfrac{1+1}{2.4} = \dfrac{1}{4}$

* Para $x = 2$: $\left(\dfrac{F^2+G^2}{2H}\right)(2) = \dfrac{F^2(2)+G^2(2)}{2H(2)} = \dfrac{3^2+2^2}{2.7} = \dfrac{13}{14}$

Luego: $\text{Ran}\left(\dfrac{F^2+G^2}{2H}\right) = \left\{\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{13}{14}\right\}$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{13}{14} = \frac{113}{84}$$

CLAVE D

Ejercicio 47

Si $F(2x-1) = 4x^2-4x \quad \wedge \quad G(x-2) = F(2x)$. Calcular el valor de $E = 5\sqrt{\dfrac{(F \circ G)(0)}{14}}$

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Resolución:

$F(2x-1) = 4x^2-4x = (2x-1)^2-1 \longrightarrow F(x) = x^2-1\ ;\ D_F = \mathbf{R}$

$$G(x-2)=F(2x)$$

$$G(0)=G(2-2)=F(2\,.\,2)=F(4)=4^2-1=15$$

$$(F\text{ o }G)(0)=F(G(0))=F(15)=15^2-1=224$$

Luego: $E=5\sqrt{\dfrac{(F\text{ o }G)(0)}{14}}=5\sqrt{\dfrac{224}{14}}$ $\quad\therefore\quad$ **$E=20$** **CLAVE: D**

Ejercicio 48

Se definen las funciones F y G por $F(x)=x^2+2x$; $G(x)=2x-m$; $m<0$. Calcular el valor de m tal que cumple con la condición: $(F\text{ o }G)(2)=(G\text{ o }F)(m-2)$

A) –7 B) –8 C) –9 D) –10 E) –11

Resolución:

$F(x)=x^2+2x$; $D_F=\mathbf{R}$; $G(x)=2x-m$; $m<0$; $D_G=\mathbf{R}$

Como $D_F=D_G=\mathbf{R}$, entonces: F o G y G o F están definidos:

* $(F\text{ o }G)(2)=F(G(2))=F(4-m)=(4-m)^2+2(4-m)$

$(G\text{ o }F)(m-2)=G(F(m-2))=G((m-2)^2+2(m-2))=2(m-2)^2+4(m-2)-m$

Luego: $(F\text{ o }G)(2)=(G\text{ o }F)(m-2)\longrightarrow(4-m)^2+2(4-m)=2(m-2)^2+4(m-2)-m$

$\longrightarrow\ m^2-10m+24=2m^2-5m\ \longrightarrow\ m^2+5m-24=0\ \longrightarrow\ m=-8\ \vee\ m=3$

Como $m<0$ $\quad\therefore\quad$ **$m=-8$** **CLAVE: B**

Ejercicio 49

Dadas las funciones G = {(1; 0), (3 ; 3), (0 ; 4), (2 ; 1)} ; H = {(1 ; 6), (2 ; 2), (3 ; 9)}. Determinar una función F tal que F o G = H y dar como respuesta la suma de los elementos del R_F.

A) 17 B) 13 C) 2 D) 3 E) 10

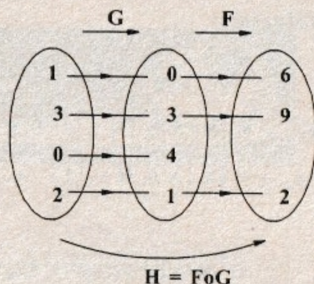
Resolución:

G = {(1 ; 0), (3 ; 3), (0 ; 4), (2 ; 1)} ; H = {(1 ; 6), (2 ; 2), (3 ; 9)}

Realizando un gráfico para observar la composición: F o G.



Del gráfico, la función F tal que FoG = H, debe ser:



$F = \{(0 ; 6), (3 ; 9), (1 ; 2)\}$

$R_F = \{6 ; 9 ; 2\}$

$\therefore$ $6 + 9 + 2 = 17$ **CLAVE : A**

Ejercicio 50

Se define las funciones: $F = \{(1 ; 2), (2 ; 3), (3 ; 5), (4 ; 7)\}$

$G = \{(0 ; 3), (1 ; 2), (2 ; 1), (3 ; 4)\}$

Determinar el producto de los elementos del rango de la función H = (FoG) + (GoF).

A) 12 B) 18 C) 24 D) 36 E) 48

Resolución:

$F = \{(1 ; 2), (2 ; 3), (3 ; 5), (4 ; 7)\}$; $G = \{(0 ; 3), (1 ; 2), (2 ; 1), (3 ; 4)\}$

$H = F \circ G + G \circ F$.

$D_{F \circ G} = \{x / x \in D_G \wedge G(x) \in D_F\} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\} \cap \{3 ; 2 ; 1 ; 4\}$

$D_{F \circ G} = \{1 ; 2 ; 3\}$

$D_{G \circ F} = \{x / x \in D_F \wedge F(x) \in D_G\} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\} \cap \{1 ; 2\}$

$D_{GoF} = \{1 ; 2\}$

Luego: $D_H = \mathbf{Dom}(F \circ G) \wedge \mathbf{Dom}(G \circ H)$ $\longrightarrow$ $D_H = \{1 ; 2 ; 3\} \cap \{1 ; 2\} = \{1 ; 2\}$

* Para $x = 2$: $H(2) = (F \circ G)(2) + (G \circ F)(2) = F(G(2)) + G(F(2)) = F(1) + G(3) = 2 + 4 = 6$

*Para $x = 1$: $H(1) = (F \circ G)(1) + (G \circ F)(1) = F(G(1)) + G(F(1)) = F(2) + G(2) = 3 + 1 = 4$

$R_H = \{4 , 6\}$

$\therefore$ $4 . 6 = 24$ **CLAVE: C**

Ejercicio 51

Se define la función F, tal que:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x < 1 \\ x^2 & ; \ x > 1 \end{cases}$$

Determinar: $(F \circ F)(x)$, indicando su dominio.

Resolución:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = 1 & ; x < 1 \\ F_2(x) = x^2 & ; x > 1 \end{cases}$$

$D_{F\,o\,G} = \{x \,/\, x \in D_F \ \wedge \ F(x) \in D_F\}$

$D_{F\,o\,G} = \{x \,/\, x \in \mathbf{R} - \{1\} \ \wedge \ [(x < 1 \ \wedge \underbrace{1 \in D_F)}_{\text{Falso}} \ \vee \ (x > 1 \ \wedge \ x^2 \in D_F)]\}$

$x > 1 \ \wedge \ x^2 \in D_F \longrightarrow x > 1 \ \wedge \ x^2 \in \mathbf{R} - \{1\}$

$x > 1 \ \wedge \ x^2 \geq 0 \ \wedge \ x^2 \neq 1 \longrightarrow x > 1$

Luego: $D_{F\,o\,G} = \{x \,/\, x \in \mathbf{R} - \{1\} \ \wedge \ (x > 1)\}$

$D_{F\,o\,G} = \langle 1 ; +\infty \rangle$

Ejercicio 52

Sean : $F = \{(1 ; 2), (3 ; 4), (2 ; 6), (5 ; 7)\}$; $G = \{(2 ; 3), (4 ; 1), (3 ; 6), (5 ; 9)\}$

$H(x) = x + 2 \ ; \ x \in \langle -2 ; 2]$

Determine el rango de (F + G) o H y dar como respuesta la suma de sus elementos.

A) 16 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

Resolución:

$F = \{(1 ; 2), (3 ; 4), (2 ; 6), (5 ; 7)\}$; $G = \{(2 ; 3), (4 ; 1), (3 ; 6), (5 ; 9)\}$

$\mathbf{Dom}(F + G) = D_F \cap D_G$

$\mathbf{Dom}(F + G) = \{1 ; 2 ; 3 ; 5\} \cap \{2 ; 3 ; 4 ; 5\} \longrightarrow \mathbf{Dom}(F + G) = \{2 ; 3 ; 5\}$

$\mathbf{Dom}((F + G) \text{ o } H) = \{x \,/\, x \in \mathbf{Dom}(H) \wedge H(x) \in \mathbf{Dom}(F + G)\}$

$H(x) \in \mathbf{Dom}(F + G)$:

$\longleftrightarrow (x + 2 = 2 \ \vee \ x + 2 = 3 \vee x + 2 = 5) \longleftrightarrow (x = 0 \ \vee \ x = 1 \vee x = 3)$

$\mathbf{Dom}((F + G) \text{ o } H) = \{x \,/\, x \in \langle -2 ; 2] \ \wedge \ x \in \{0 ; 1; 3\}$

$\mathbf{Dom}((F + G) \text{ o } H) = \{0 ; 1\}$

* Para $x = 0$: $((F + G) \text{ o } H)(0) = (F + G)(H(0)) = (F + G)(2) = F(2) + G(2) = 6 + 3 = 9$

* Para $x = 1$: $((F + G) \text{ o } H)(1) = (F + G)(H(1)) = (F + G)(3) = F(3) + G(3) = 4 + 6 = 10$

$\mathbf{Ran}((F + G) \text{ o } H) = \{9 ; 10\}$ $\therefore$ $9 + 10 = 19$

CLAVE: C

PROBLEMAS RESUELTOS



PROBLEMA 1

Si:

$A \times B = \{(1;2), (1;3), (1;4), (2;2), (2;3), (2,4)\}$

$C = \{1, 5, 6\}$

Determinar : $(A - C) \cup B$

Resolución:

Se sabe que:

$A \times B = \{(a;b) / a \in A \wedge b \in B\}$

como:

$A \times B = \{(1;2), (1;3), (1;4), (2;2), (2;3), (2;4)\}$

Se deduce que:

$A = \{1, 2\} \quad \wedge \quad B = \{2, 3, 4\}$

Observar que:

$A - C = \{1, 2\} - \{1, 5, 6\}$

$A - C = \{2\}$

Finalmente:

$(A - C) \cup B = \{2\} \cup \{2, 3, 4\}$

$\therefore \; (A - C) \cup B = \{2, 3, 4\}$

PROBLEMA 2

Que conjuntos de pares ordenados.

I) $R_1 = \{(3;2), (4;6), (5;-1)\}$

II) $R_2 = \{(1;2), (1;3), (1;-2)\}$

III) $R_3 = \{(1;4), (3;4), (7;3)\}$

IV) $R_4 = \{(3;6), (3;7), (4;7)\}$

Representa a una función.

Resolución:

Observar que:

$R_2 = \{(1;2), (1;3), (1;-2)\}$

Para un valor de "*x*" (1) existe más de un valor para "y" (2, 3, -2) con lo cual R_2 no es función.

También para:

$R_4 = \{\underline{(3;6)}, \underline{(3;7)}, (4;7)\}$

Por lo anterior R_4 no es función.

$\therefore$ son funciones $R_1 \wedge R_3$

PROBLEMA 3

Determinar los valores de "a" y "b" para que el conjunto:

$F = \{(2;5), (-1;-3), (2;2a^2-b), (-1;b-a^2)\}$

sea una función.

Resolución:

De acuerdo con la definición, si F es una función se debe cumplir que:

$$\begin{cases} 2a^2 - b = 5 & \text{....(1)} \\ b - a^2 = -3 & \text{....(2)} \end{cases}$$

Sumando (1) y (2):

$$a^2 = 2 \longrightarrow a = \sqrt{2} \vee a = -\sqrt{2}$$

Reemplazando en (2): $b = a^2 - 3$

$$b = 2 - 3$$

$$b = -1$$

$$\therefore \quad \{a = \sqrt{2} \wedge b = -1\} \vee \{a = -\sqrt{2} \wedge b = -1\}$$

PROBLEMA 4

Las funciones F, G ∧ H tienen las siguientes reglas de correspondencias:

$$F(x) = -x^2, \ G(x) = -x \wedge H(x) = 1/x$$

Las gráficas de F ∧ G se cortan en los puntos "P" y "Q" y las gráficas de F ∧ H en el punto "R", luego los puntos P, Q ∧ R son:

Resolución:

Intersección de F y G:

$$F(x) = G(x)$$

$$-x^2 = -x$$

$$x^2 = x \longrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Los puntos son: $(0 ; F(0))$ y $(1 ; F(1))$

Es decir: $(0 ; 0)$ y $(1 ; -1)$

O sea: $P = (0 ; 0) \wedge Q = (1 ; -1)$

Intersección de F y H:

$$-x^2 = 1/x$$

$$x^3 = -1 \longrightarrow x = -1$$

El punto será: $(-1 ; F(-1))$

Es decir: $(-1 ; -1) \longrightarrow R = (-1 ; -1)$

$$\therefore \quad (0 ; 0), (1 ; -1) \wedge (-1 ; -1)$$

PROBLEMA 5

Determinar la regla de correspondencia de la función lineal F tal que:

$$F(2) = 3 \wedge F(3) = 2F(4)$$

Resolución:

Como F es lineal: $F(x) = ax + b$ ....(1)

Para $x = 2$: $F(2) = 2a + b$

$$2a + b = 3 \qquad ....(2)$$

Para $x = 3$: $F(3) = 3a + b$
Para $x = 4$: $F(4) = 4a + b$
$\Big\}\ F(3) = 2F(4)$

$$3a + b = 2(4a + b)$$

$$3a + b = 8a + 2b$$

$$b = -5a \qquad .....(3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$2a - 5a = 3$$

$$-3a = 3 \longrightarrow a = -1$$

Como: $b = -5a \longrightarrow b = -5(-1)$

$$b = 5$$

Finalmente en (1):

$$F(x) = ax + b$$

$$\therefore \quad F(x) = -x + 5$$

PROBLEMA 6

Calcular el área limitada por las siguientes relaciones:

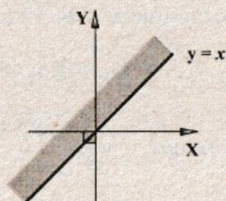
$$R_1 = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / y \geq x\} \wedge$$

$$R_2 = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 16\}$$

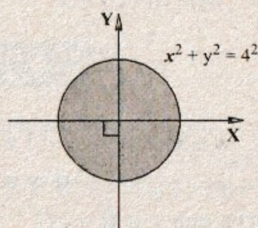


Resolución:

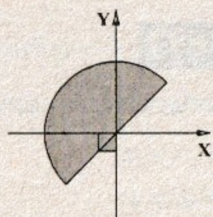
Para R_1:



Para R_2:



Finalmente intersectando R_1 y R_2 tenemos:



Observar que el área pedida es la mitad del área que encierra la circunferencia: $x^2 + y^2 = 4^2$, es decir:

$$\text{área} = \frac{\pi(4)^2}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{área} = 8\pi\ \mu^2}$$

PROBLEMA 7

Gráficar la siguiente relación:

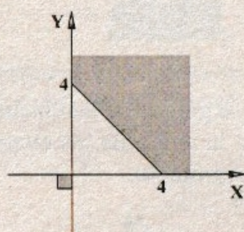
$$R = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 / |x| + |y| \geq 4\}$$

Resolución:

Con la finalidad de eliminar el valor absoluto planteamos cuatro casos, veamos:

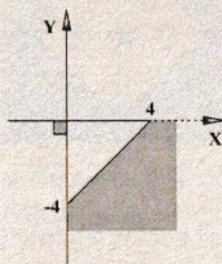
I) $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \;\wedge\; x + y \geq 4$

$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \;\wedge\; y \geq 4 - x$



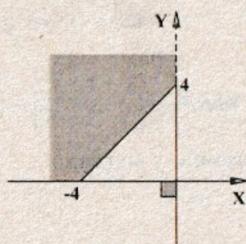
II) $x \geq 0 \;\wedge\; y < 0 \;\wedge\; x - y \geq 4$

$x \geq 0 \;\wedge\; y < 0 \;\wedge\; y \leq x - 4$



III) $x < 0 \;\wedge\; y \geq 0 \;\wedge\; -x + y \geq 4$

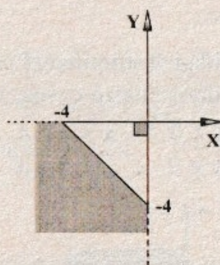
$x < 0 \;\wedge\; y \geq 0 \;\wedge\; y \geq x + 4$



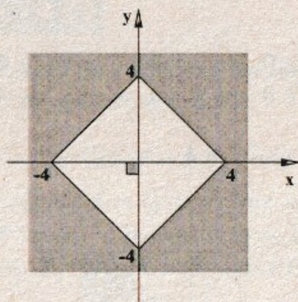
IV) $x < 0 \;\wedge\; y < 0 \;\wedge\; -x - y \geq 4$

$x < 0 \;\wedge\; y < 0 \;\wedge\; y \leq -x - 4$





Finalmente la gráfica de la relación R viene dada por la unión de los cuatro casos vistos anteriormente.



Observación:

La gráfica de: $|x|+|y|=a\,/\,a>0$ siempre genera un cuadrado cuyo lado es $a\sqrt{2}$.

PROBLEMA 8

Dada la relación:

$$R=\left\{(x\,;\,y)\in R^2\,/\,y=\frac{x+2}{x-5}\right\}.$$

Determinar su dominio y su rango.

Resolución:

Para el dominio: $y=\dfrac{x+2}{x-5}$

$$y\in \mathbf{R} \iff x-5\neq 0$$
$$x\neq 5$$

Se observa que $x\in \mathbf{R}-\{5\}$

$$\therefore\quad D_R=\mathbf{R}-\{5\}$$

Para el rango: $y=\dfrac{x+2}{x-5}$

$$xy-5y=x+2$$
$$xy-x=5y+2$$
$$x=\frac{5y+2}{y-1}$$
$$x\in \mathbf{R} \iff y-1\neq 0$$
$$y\neq 1$$

Se observa que $y\in \mathbf{R}-\{1\}$

$$\therefore\quad R_R=\mathbf{R}-\{1\}$$

PROBLEMA 9

Gráficar la relación dada en el problema anterior.

Resolución:

En busca de las asíntotas

Vertical: $y=\dfrac{x+2}{x-5}\ \longrightarrow\ x-5=0$

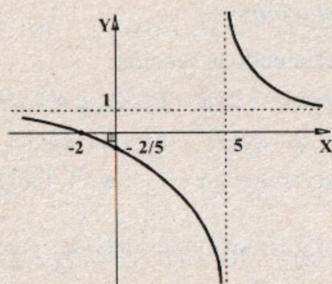
$$x=5$$

Horizontal: $x=\dfrac{5y+2}{y-1}\ \longrightarrow\ y-1=0$

$$y=1$$

Finalmente la gráfica de R: $y=\dfrac{x+2}{x-5}$ será:





PROBLEMA 10

Gráficar la siguiente relación:

$R = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / y = \sqrt{4-(x-2)^2}\ \}$

Resolución:

Hallemos el dominio.

De la condición: $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

$$y \in \mathbf{R} \iff 4-(x-2)^2 \geq 0$$
$$x(x-4) \leq 0$$
$$0 \leq x \leq 4$$

Observar que $x \in [0 ; 4] \Longrightarrow D_R = [0 ; 4]$

Hallemos el rango.

De la condición: $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

$$y \geq 0 \ \wedge \ y^2 = 4-(x-2)^2$$
$$y \geq 0 \ \wedge \ (x-2)^2 = 4-y^2$$

Se sabe que: $(x-2)^2 \geq 0 \ ; \forall x \in \mathbf{R}$

Ahora tenemos: $4-y^2 \geq 0$

$$(y+2)(y-2) \leq 0$$
$$-2 \leq y \leq 2$$

Como $y \geq 0$: $\quad 0 \leq y \leq 2$

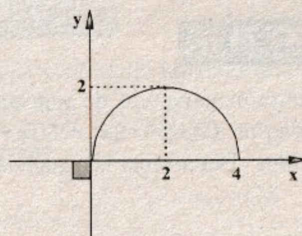
Observar que : $y \in [0 ; 2] \longrightarrow R_R = [0 ; 2]$

Finalmente grafiquemos la relación R

De la relación: $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

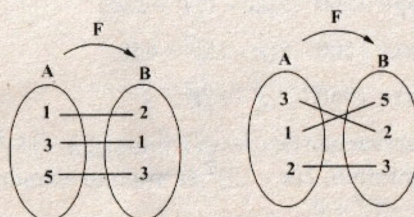
$$(x-2)^2 + y^2 = 2^2$$

Circunferencia con centro en (2 ; 0) y radio 2, limitada por $x \in [0 ; 4] \wedge y \in [0 ; 2]$



PROBLEMA 11

Dadas las funciones F y G definidas en los diagramas sagitales



Determinar el valor de:

$$K = \frac{F(1)+G(3)}{F(G(1))+F(G(2))}$$

Resolución:

Del diagrama tenemos:

$$G(1) = 5 \quad \wedge \quad G(2) = 3$$

$$K = \frac{F(1)+G(3)}{F(5)+F(3)}$$

Así mismo tenemos:

$$F(1) = 2,\ F(3) = 1,\ F(5) = 3 \wedge G(3) = 2$$

$$K = \frac{2+2}{3+1} = \frac{4}{4}$$

$$\therefore \quad K = 1$$

PROBLEMA 12

Si la función ganancia de una empresa esta dada por: $G(x) = -2x^2 + 60x + 1500$, "$x$" en soles . Determinar la ganancia máxima.

Resolución:

De acuerdo con el enunciado se pide el máximo valor de la función $G(x)$, veamos:

$$G(x) = -2x^2 + 60x + 1500 = 1500 - 2(x^2 - 30x)$$

$$G(x) = 1500 - 2[(x-15)^2 - 225]$$

$$G(x) = 1500 - 2(x-15)^2 + 450$$

$$G(x) = 1950 - 2(x-15)^2$$

Observar que G(x) es máximo si $2(x-15)^2$ es mínimo, $2(x-15)^2$ es mínimo cuando $(x-15)^2 = 0$

$$\therefore \quad G(x)_{máx} = 1950$$

PROBLEMA 13

Dada la función F definida así:

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = -2|x-1| - 2, x \in \langle 2 ; 3\rangle$

Determinar si existe $F^*(-5)$

Resolución:

Redefiniendo la función:

$$y = F(x) = -2|x-1| - 2 ;\ x \in \langle 2 ; 3\rangle$$

$$2 < x < 3 \implies 1 < x-1 < 2$$

Observar que: $|x-1| = x-1$, luego tenemos:

$$y = F(x) = -2(x-1) - 2 = -2x + 2 - 2$$

$y = F(x) = -2x ;\ x \in \langle 2 , 3\rangle$ "función inyectiva"

Hallemos R_F, pues $R_F = D_{F^*}$

$$2 < x < 3 \implies -6 < -2x < -4$$

$$-6 < y < -4$$

Observar que:

$$y \in \langle -6 ; -4\rangle \implies D_{F^*} = \langle -6 ; -4\rangle$$

Con lo cual se concluye que existe $F^*(-5)$

Se sabe que: $F(x) = -2x$

$$F(F^*(x)) = -2F^*(x)$$

$$x = -2F^*(x)$$

De donde obtenemos:

$$F^*(x) = -\frac{x}{2}$$

$$\therefore \quad F^*(-5) = \frac{5}{2}$$

PROBLEMA 14

Gráficar la función definida por:

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = \sqrt{x + |x|}$

Resolución:

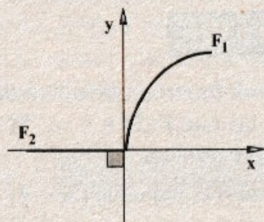
Redefiniendo la función $F(x) = \sqrt{x + |x|}$

I) $x \geq 0 \implies F(x)=\sqrt{x+x}=\sqrt{2x}$

II) $x<0 \implies F(x)=\sqrt{x-x}=0$

$$y=F(x)=\begin{cases}\sqrt{2x} & ;\ x\geq 0 & ...F_1\\ 0 & ;\ x<0 & ...F_2\end{cases}$$

Finalmente la gráfica de la función F será:



PROBLEMA 15

Determinar el rango de la función F cuya regla de correspondencia es:

$$y=F(x)=\begin{cases}-\sqrt{4-x^2} & ;\ |x|\leq 2 & ...F_1\\ |x|+4 & ;\ |x|>2 & ...F_2\end{cases}$$

Resolución:

Observar que el rango de la función F viene dada por la unión de los rangos de F_1 y F_2.

Para F_1: $y=-\sqrt{4-x^2}$; $|x|\leq 2$

$$-2\leq x\leq 2 \implies 0\leq x^2\leq 4$$

$$-4\leq -x^2\leq 0$$

$$0\leq 4-x^2\leq 4$$

$$0\leq \sqrt{4-x^2}\leq 2$$

$$-2\leq -\sqrt{4-x^2}\leq 0$$

Notar que: $R_{F_1}=[-2\,;0]$

Para F_2: $y=|x|+4$; $|x|>2$

$$|x|>2 \implies |x|+4>6$$

Notar que: $R_{F_2}=\langle 6\,;\infty\rangle$

Finalmente tenemos:

$$R_F=R_{F_1}\cup R_{F_2}$$

$$\therefore\ \boxed{R_F=[-2\,;0]\cup\langle 6\,;\infty\rangle}$$

PROBLEMA 16

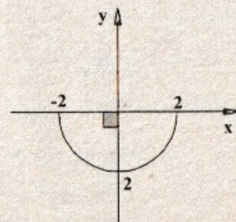
Esbozar la gráfica de la función del problema anterior.

Resolución:

$$y=F(x)=\begin{cases}-\sqrt{4-x^2} & ;\ |x|\leq 2 & ...F_1\\ |x|+4 & ;\ |x|>2 & ...F_2\end{cases}$$

Para F_1: $y=-\sqrt{4-x^2} \implies x^2+y^2=2^2$

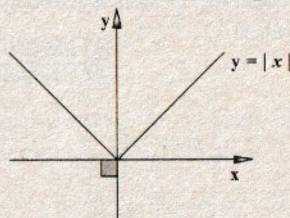
$$D_{F_1}=[-2\,;2]\ \wedge\ R_{F_1}=[-2\,;0]$$



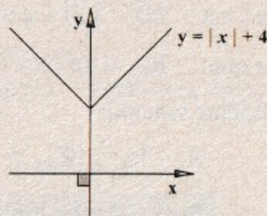
Para F_2: $y=|x|+4$

$D_{F_2}=\langle-\infty\,;-2\rangle\cup\langle 2\,;\infty\rangle \wedge R_{F_2}=\langle 6\,;\infty\rangle$

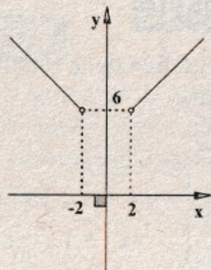
De:



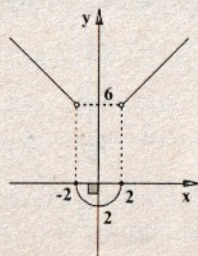
Desplazando 4 unidades hacia arriba tenemos:



Luego considerando el dominio y rango se tendrá:

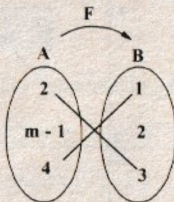


Finalmente la gráfica de la función F viene dada por la unión de las gráficas de F_1 y F_2, veamos:



PROBLEMA 17

A continuación se muestra una aplicación F de A en B.



Luego el valor de "m" será:

Resolución:

Como F es una aplicación: $A = D_F$, en consecuencia se debe cumplir que:

$$m - 1 = 2 \quad \vee \quad m - 1 = 4$$

$$\therefore \quad \boxed{m = 3 \quad \vee \quad m = 5}$$

PROBLEMA 18

Se tiene una función periódica de periodo T = 3, tal que F(5) = 3 ∧ F(–2) = 7. Según esto calcular:

$$N = F(11) + F(F(1) + 4)$$

Resolución

Sea la función: $y = F(x)$, como es periódica de periodo T = 3 se plantea:

$$F(x) = F(x + 3) \qquad ...(1)$$

Si: $x = -2$ entonces $F(-2) = F(1)$

Es decir: $F(1) = 7$

Si: $x = 5$ entonces $F(5) = F(8)$

Es decir: $F(8) = 3$

Si: $x = 8$ entonces $F(8) = F(11)$

Es decir: $F(11) = 3$

Finalmente tenemos:

$$K = F(11) + F(F(1) + 4)$$

$$K = 3 + F(7 + 4)$$

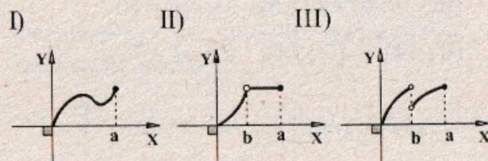
$$K = 3 + F(11) = 3 + 3$$

$$\therefore \quad \boxed{K = 6}$$

PROBLEMA 19

Cuál de los gráficos representa a una función continua:





Resolución:

Tener en cuenta que una función es continua si su gráfica no presenta ruptura, es decir la variable dependiente "y" existe para todo valor de la variable independiente "x".

$\therefore$ **solo (I) es continua**

PROBLEMA 20

Determinar el valor de "x" que hace mínima a la función F, cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = 3x^2 - 12x - 4$$

Resolución:

La función dada es:

$$F(x) = 3x^2 - 12x - 4$$
$$F(x) = 3[x^2 - 4x] - 4$$
$$F(x) = 3[(x-2)^2 - 4] - 4$$
$$F(x) = 3(x-2)^2 - 12 - 4$$
$$F(x) = 3(x-2)^2 - 16$$

Observar que $F(x)$ es mínimo si $3(x-2)^2$ es mínimo, luego $3(x-2)^2$ será mínimo si $(x-2)^2 = 0$

Es decir: $x - 2 = 0$

$\therefore$ $\boxed{x = 2}$

PROBLEMA 21

Dada la función F, donde:

$$F: \mathbf{R} \to B \,/\, y = F(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad ; x \in \mathbf{R}$$

Determinar B para que F sea suryectiva

Resolución:

Por condición se cumple: $B = R_F$, luego debemos encontrar el rango de la función F, veamos:

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

$$yx^2 - x + y = 0$$

Suponga usted que está frente a una ecuación cuadrática en x, donde se sabe que $x \in \mathbf{R}$ (la ecuación tiene raices reales) luego el discriminante de dicha ecuación debera ser no negativo, es decir:

$$(-1)^2 - 4(y)(y) \geq 0$$

$$1 - 4y^2 \geq 0 \iff 4y^2 - 1 \leq 0$$

$$(2y+1)(2y-1) \leq 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \iff y \in \left[-\frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{2}\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{R_F = B = \left[-\frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{2}\right]}$$

PROBLEMA 22

Calcular el valor de "a + b" sabiendo que la aplicación:

$F: [a\,;b] \to [-1\,;5] \,/\, y = F(x) = \sqrt[3]{x-1}$ es

biyectiva

Resolución:

De acuerdo con la definición F es biyectiva si: $R_F = [-1 ; 5]$

Es decir: $-1 \leq \sqrt[3]{x-1} \leq 5$

$-1 \leq x - 1 \leq 125$

$0 \leq x \leq 126$

Observar que:

$x \in [0 ; 26]$ entonces $D_F = [0 ; 126]$

Por condición:

$D_F = [a ; b]$ entonces $a = 0 \wedge b = 126$

$\therefore$ $a + b = 126$

PROBLEMA 23

Si se conoce:

$F = \{(2 ; 4), (3 ; 6), (5 ; 10), (7 ; 14), (m ; 1)\}$

$F^* = \{(4 ; a), (10 ; b), (6 ; m - 7), (p/2 ; c), (14 ; d)\}$

Calcular: $K = a + b + c + d + m + p$

Resolución:

Se sabe que: $(F^*)^* = F$, luego tenemos:

$F^* = \{(4 ; a), (10 ; b), (6 ; m - 7), (p/2 ; c), (14 ; d)\}$

$(F^*)^* = \{(a ; 4), (b ; 10), (m - 7 ; 6), (c ; p/2), (d ; 14)\}$

$F = \{(a;4), (b;10), (m-7;6), (c;p/2), (d;14)\}$

Ahora se cumple:

$(a ; 4) = (2 ; 4) \implies a = 2$

$(b ; 10) = (5 ; 10) \implies b = 5$

$(m - 7 ; 6) = (3 ; 6) \implies m = 10$

$(d ; 14) = (7 ; 14) \implies d = 7$

$(c ; p/2) = (m ; 1) \implies c = m \wedge \dfrac{p}{2} = 1$

$c = 10 \wedge p = 2$

Finalmente:

$K = 2 + 5 + 10 + 7 + 10 + 2$

$\therefore$ $K = 36$

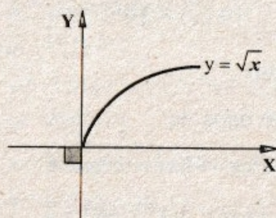
PROBLEMA 24

Esbozar la gráfica de la función F, cuya regla de correspondencia viene dada por:

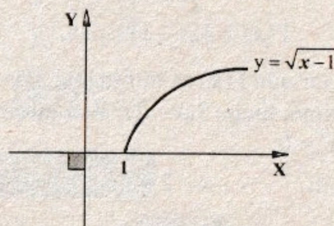
$$y = F(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

Resolución:

Partiendo de:

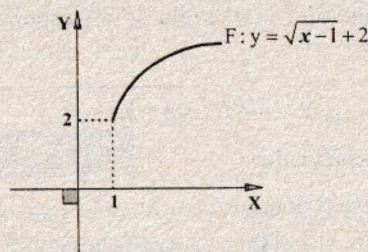


Desplazando una unidad hacia la derecha se tendrá:





Desplazando dos unidades hacia arriba finalmente tenemos:



PROBLEMA 25

Con respecto al problema anterior; determinar F* y esbozar su gráfica.

Resolución:

Al observar la gráfica de la función F, del problema anterior podemos deducir que F es inyectiva, luego existe F*

$D_F = [1\,;\infty\rangle \implies R_{F^*} = [1\,;\infty\rangle$

$R_F = [2\,;\infty\rangle \implies D_{F^*} = [2\,;\infty\rangle$

Ahora hallemos la regla de correspondencia de F*

Para F tenemos: $y = \sqrt{x-1}+2$

Para F* tenemos: $x = \sqrt{y-1}+2$

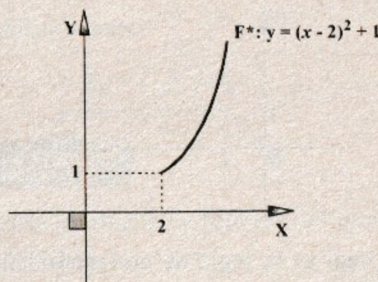
$$\sqrt{y-1} = x-2$$

$$y-1 = (x-2)^2$$

$$y = (x-2)^2+1$$

De donde:

$F^* = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 / y = (x-2)^2+1\,; x \in [2\,;\infty\rangle\}$



PROBLEMA 26

Dadas las funciones:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$G: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/ y = G(x) = (x+10)^2$$

Determinar el conjunto $D_F \cap D_G$

Resolución:

Hallemos D_F: $y \in \mathbf{R} \iff x^2-1 \neq 0$

de donde:

$x \neq 1 \wedge x \neq -1 \implies x \in \mathbf{R} - \{-1\,,1\}$

Observar que: $D_F = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

Hallemos D_G: $y = (x+10)^2$

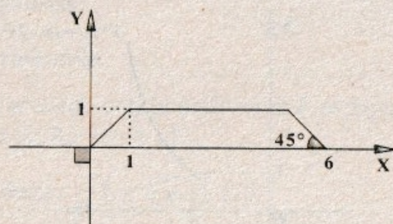
$y \in \mathbf{R} \wedge (x+10)^2 \in \mathbf{R} \implies x \in \mathbf{R}$

Observar que: $D_G = \mathbf{R}$

$$\therefore \quad \boxed{D_F \cap D_G = \mathbf{R} - \{-1\,,1\}}$$

PROBLEMA 27

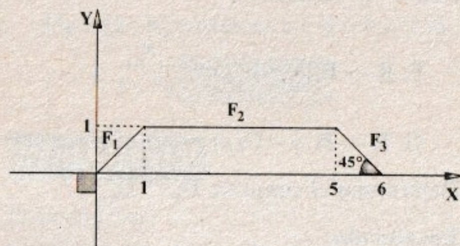
Si la gráfica de la función F esta representada por la figura.



¿cuál es la regla de correspondencia de F?

Resolución:

En la figura:



Para F_1: $y = F(x) = x\ ;\ 0 \le x < 1$

Para F_2: $y = F(x) = 1\ ;\ 1 \le x < 5$

Para F_3: $y = F(x) = ax + b\ ;\ 5 \le x \le 6$

observar que $(5\ ;\ 1) \in F_3$, luego:

$$5a + b = 1 \qquad ...(1)$$

asimismo $(6\ ;\ 0) \in F_3$, luego:

$$6a + b = 0 \qquad ...(2)$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$a = -1 \ \wedge\ b = 6$$

Finalmente la regla de correspondencia de F será:

$$y = F(x) = \begin{cases} x\ ;\ 0 \le x < 1 & ...F_1 \\ 1\ ;\ 1 \le x < 5 & ...F_2 \\ -x + 6\ ;\ 5 \le x \le 6 & ...F_3 \end{cases}$$

PROBLEMA 28

Proporcionar el dominio y el rango de la función F cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \sqrt{4 + 3x - x^2}$$

Resolución:

Para el dominio:

$$y \in \mathbf{R} \iff 4 + 3x - x^2 \ge 0$$

$$x^2 - 3x - 4 \le 0 \iff (x-4)(x+1) \le 0$$

$$-1 \le x \le 4 \iff x \in [-1\ ;\ 4]$$

De donde tenemos:

$$D_F = [-1\ ;\ 4]$$

Para el rango:

$$y = \sqrt{4 + 3x - x^2} = \sqrt{\frac{25}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}$$

Ahora procedemos a formar "y" a partir de $-1 \le x \le 4$ veamos:

$$-1 \le x \le 4$$

$$-\frac{5}{2} \le x - \frac{3}{2} \le \frac{5}{2}$$

$$0 \le \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{25}{4}$$

$$-\frac{25}{4} \le -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \le 0$$

$$0 \le \frac{25}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{25}{4}$$

$$0 \le \sqrt{\frac{25}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \le \frac{5}{4}$$



$$0 \leq y \leq \frac{5}{2} \iff y \in \left[0\ ;\ \frac{5}{2}\right]$$

De donde tenemos: $R_F = \left[0\ ;\ \frac{5}{2}\right]$

PROBLEMA 29

Determinar el dominio y el rango de la función F cuya regla de correspondencia viene dada por:

$$y = F(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 23x + 6}{x^2 + x - 6}$$

Resolución:

Para el dominio $y \in \mathbf{R} \iff x^2 + x - 6 \neq 0$

$$(x+3)(x-2) \neq 0$$

Observar que:

$$x \neq -3 \wedge x \neq 2 \implies x \in \mathbf{R} - \{-3\ ,2\}$$

De donde tenemos: $D_F = \mathbf{R} - \{-3\ ,\ 2\}$

Para el rango:

$$y = \frac{x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 23x + 6}{x^2 + x - 6}$$

$$y = \frac{(x^2 + x - 6)(x^2 - 4x - 1)}{x^2 + x - 6}$$

Como: $x \neq 2 \wedge x \neq -3$, luego tenemos:

$$y = x^2 - 4x - 1$$

Observar que: $y = (x-2)^2 - 5$

Se sabe que: $(x-2)^2 \geq 0\ \ \forall x \in \mathbf{R}$, pero como $x \neq 2$ se plantea lo siguiente:

$$(x-2)^2 > 0 \iff (x-2)^2 - 5 > -5$$

$$y > -5 \iff y \in \langle -5\ ;\ \infty \rangle$$

De donde tenemos:

$$R_F = \langle -5\ ;\ \infty \rangle$$

PROBLEMA 30

Esbozar la gráfica de la función del problema anterior.

Resolución:

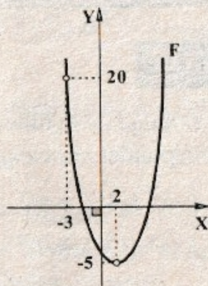
Se tiene:

$$y = F(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 23x + 6}{x^2 + x - 6}$$

De donde: $y = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$

Es la ecuación de una parábola con vétice en $(2\ ;\ -5)$ y el eje focal paralelo al eje y abierto hacia arriba.

Considerando el dominio y el rango de la función F procedemos a graficar:



PROBLEMA 31

Dada la función F, tal que:

$$y = F(x) = \begin{cases} x^2 - 4\ ;\ x \leq -2 & \ldots F_1 \\ 2 - |x|\ ;\ -2 < x < 2 & \ldots F_2 \\ \sqrt{x-2}\ ;\ x \geq 2 & \ldots F_3 \end{cases}$$

Se podrá afirmar que:

I) Es creciente en $\langle -\infty ; -2\rangle$

II) Es creciente en $\langle -2 ; 2\rangle$

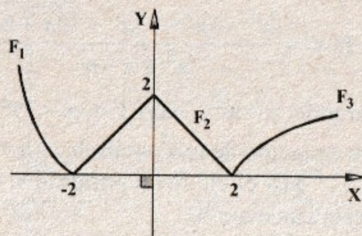
III) Es continua en su dominio

IV) Es creciente en $\langle 0 ; \infty\rangle$

V) Es creciente en $\langle 0 ; 2\rangle$

Resolución:

Graficaremos la función F para luego analizar cada proposición dada, veamos:



$\therefore$ **F es continua en su dominio.**

PROBLEMA 32

Determinar el rango de la función F, cuya regla de correspondencia viene dada por:

$$y = F(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 \ ; \ x < 3 & ...F_1 \\ -2x + 5 \ ; \ x > 3 & ...F_2 \end{cases}$$

Resolución:

Para F_1: $x < 3 \iff -\infty < x < 3$

$$0 \leq x^2 < \infty$$

$$-\infty < -x^2 \leq 0$$

$$-\infty < 4 - x^2 \leq 4$$

$$-\infty < y \leq 4 \iff y \in \langle -\infty ; 4]$$

Observar que: $R_{F_1} = \langle -\infty ; 4]$

Para F_2: $x > 3 \iff 3 < x < \infty$

$$-\infty < -2x < -6$$

$$-\infty < 5 - 2x < -1$$

$$-\infty < y < -1 \iff y \in \langle -\infty ; -1\rangle$$

Observar que $R_{F_2} = \langle -\infty ; -1\rangle$

Finalmente tenemos:

$$R_F = R_{F_1} \cup R_{F_2}$$

$$\therefore \boxed{R_F = \langle -\infty ; 4]}$$

PROBLEMA 33

Determinar el rango de la función F definida así:

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = |x - 2| + 1 \ ; x \in [-1 ; 6\rangle$

Resolución:

Formaremos: $y = |x - 2| + 1$ a partir del dominio, veamos:

$x \in [-1 ; 6\rangle \iff -1 \leq x < 6$

$$-3 \leq x - 2 < 4$$

$$0 \leq |x - 2| < 4$$

$$1 \leq |x - 2| + 1 < 5$$

$$1 \leq y < 5 \iff y \in [1 ; 5\rangle$$

$$\therefore \boxed{R_F = [1; 5\rangle}$$

PROBLEMA 34

Si $y = F(x) = \sqrt{1 - x^2} \wedge y = G(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Determinar la función F + G.



Resolución:

Hallemos el dominio de cada una de las funciones dadas.

Para F: $y \in \mathbf{R} \iff 1 - x^2 \geq 0$

$x^2 - 1 \leq 0$

$(x+1)(x-1) \leq 0$

$-1 \leq x \leq 1 \iff x \in [-1 ; 1]$

De donde tenemos:

$$D_F = [-1 ; 1]$$

Para G: $y \in \mathbf{R} \iff x^2 - 1 \geq 0$

$(x+1)(x-1) \geq 0$

$x \leq -1 \vee x \geq 1 \iff x \in \langle -\infty ; -1] \cup [1 ; \infty\rangle$

Ahora hallemos el dominio de F + G así:

$$D_{F+G} = D_F \cap D_G$$

Es decir:

$D_{F+G} = [-1 ; 1] \cap \{\langle -\infty ; -1] \cup [1 ; \infty\rangle\}$

$D_{F+G} = \{-1 ; 1\}$

Luego la función F + G viene dada por:

$F+G = \{(-1 ; F(-1)+G(-1)), (1 ; F(1)+G(1))\}$

$F+G = \{(-1 ; 0+0), (1 ; 0+0)\}$

$\therefore \quad \boxed{F+G = \{(-1 ; 0), (1 ; 0)\}}$

PROBLEMA 35

Si:

$F = \{(-3 ; 2), (0 ; 0), (2 ; 4), (3 ; -1), (4 ; 3)\}$

$G = \{(2 ; 0), (3 ; 4), (4 ; 7), (6 ; 2)\}$

Determinar: $F^2 + 3G$

Resolución:

Se sabe que:

$D_{F^2+3G} = D_F \cap D_G$

$D_{F^2+3G} = \{-3, 0, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 6\}$

De donde: $D_{F^2+3G} = \{2, 3, 4\}$

Ahora hallemos $F^2 + 3G$, veamos:

$F^2 + 3G = \{(2 ; F^2(2) + 3G(2)), (3 ; F^2(3) + 3G(3)), (4 ; F^2(4) + 3G(4))\}$

$F^2 + 3G = \{(2 ; 16+0), (3 ; 1+12), (4 ; 9+21)\}$

$\therefore \quad \boxed{F^2 + 3G = \{(2 ; 16), (3 ; 13), (4 ; 30)\}}$

PROBLEMA 36

Dadas las funciones:

$$F = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / y = \sqrt{4-x}\} \quad \wedge$$

$$G = \left\{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right\}.$$

¿Cuál es el dominio de F + G?

Resolución:

Se sabe que: $D_{F+G} = D_F \cap D_G$ ...(1)

Hallemos el dominio de cada una de las funciones dadas, veamos:

Para F: $y \in \mathbf{R} \iff 4 - x \geq 0$

$x - 4 \leq 0$

$x \leq 4$

$x \in \langle -\infty ; 4]$

De donde: $D_F = \langle -\infty ; 4]$

Para G: $y \in \mathbf{R} \iff x^2 - 4 > 0$

$(x+2)(x-2) > 0$

$$x \in \langle -\infty ; -2\rangle \cup \langle 2 ; \infty\rangle$$

De donde: $D_G = \langle -\infty ; -2\rangle \cup \langle 2 ; \infty\rangle$

Finalmente en (1) se tendrá:

$D_{F+G} = \langle -\infty ; 4] \cap \{\langle -\infty ; -2\rangle \cup \langle 2 ; \infty\rangle\}$

$\therefore\ D_{F+G} = \langle -\infty ; -2\rangle \cup \langle 2 ; 4]$

PROBLEMA 37

Dadas las funciones:

$F : \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = x^2 - 1 \ ; \ 5 \le x \le 30$

$G : \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = G(x) = 2x + 1 \ ; \ 1 \le x \le 9$

Esbozar la gráfica de la función F o G.

Resolución:

Hallemos el dominio de la función F o G, para lo cual se plantea lo siguiente:

D_{FoG}: $x \in D_G \ \wedge \ G(x) \in D_F$

D_{FoG}: $x \in [1 ; 9] \wedge (2x + 1) \in [5 ; 30]$

D_{FoG}: $1 \le x \le 9 \ \wedge \ 5 \le 2x + 1 \le 30$

D_{FoG}: $1 \le x \le 9 \ \wedge \ 2 \le x \le 29/2$

D_{FoG}: $2 \le x \le 9 \ \wedge \ x \in [2 ; 9]$

De donde tenemos: $D_{FoG} = [2 ; 9]$

Hallemos la regla de correspondencia de F o G, para lo cual se plantea lo siguiente.

$$y = (F \text{ o } G)(x) = F(G(x))$$

Como $F(x) = x^2 - 1$

$$F(G(x)) = G^2(x) - 1$$

$$F(G(x)) = (2x + 1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x$$

De donde tenemos:

$$y = F(G(x)) = 4x^2 + 4x$$

Ahora para determinar el rango formaremos $y = 4x^2 + 4x$ a partir del dominio, veamos:

$$2 \le x \le 9$$

$$4 \le 2x \le 18$$

$$5 \le 2x + 1 \le 19$$

$$25 \le (2x + 1)^2 \le 361$$

$$24 \le (2x + 1)^2 - 1 \le 360$$

$$24 \le y \le 360 \iff y \in [24 ; 360\rangle$$

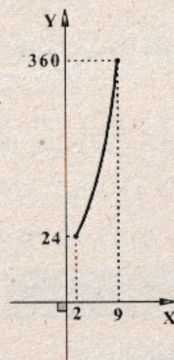
De donde tenemos:

$$R_{FoG} = [24 ; 360\rangle$$

Finalmente la gráfica de FoG viene dada por la parábola:

$$y = 4x^2 + 4x = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

Limitada por: $2 \le x \le 9 \wedge 24 \le y \le 360$



PROBLEMA 38

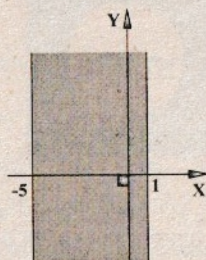
Determinar el dominio, rango y la gráfica de la relación:

$R = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / |x + 2| \le 3 \wedge |y - 2| < 4\}$

Resolución:

Para el dominio:

$$|x+2|\leq 3 \iff -3\leq x+2\leq 3$$
$$-5\leq x\leq 1$$

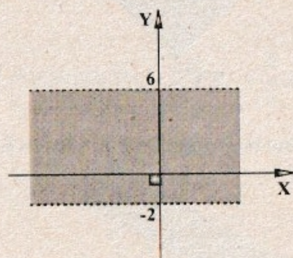


Los valores de x se encuentran en la zona sombreada incluyendo las rectas:

$$x=-5 \;\wedge\; x=1$$

Para el rango:

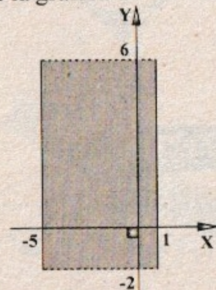
$$|y-2|<4 \iff -4<y-2<4$$
$$-2<y<6$$



Los valores de y se encuentran en la zona sombreada sin incluir las rectas:

$$y=-2 \;\wedge\; y=6$$

Finalmente la gráfica de la relación **R** será:



PROBLEMA 39

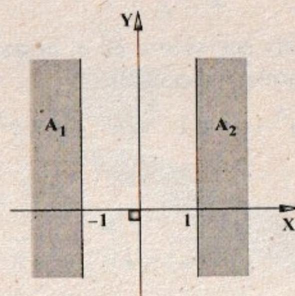
Dados los conjuntos:

$$A_1=\{x\in \mathbf{R}\,/-\infty<x\leq -1\}$$
$$A_2=\{x\in \mathbf{R}\,/\,1\leq x<\infty\}$$
$$B=\{y\in \mathbf{R}\,/\,1\leq y\leq 2\}\vee\{3\}$$

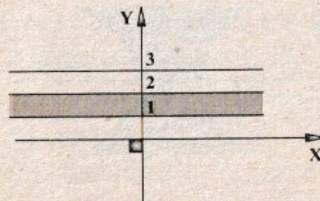
Si: $A=A_1\cup A_2$. Gráficar el producto cartesiano $A\times B$.

Resolución:

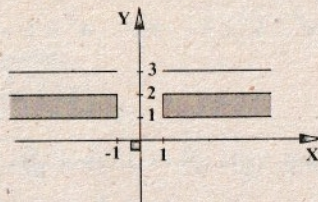
Graficando $A=A_1\cup A_2$:



Graficando B:



Finalmente el conjunto $A\times B$ tendrá la siguiente gráfica:



PROBLEMA 40

Dados los conjuntos:

$$R_1 = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, x^2 - y^2 \leq 1\}$$

$$R_2 = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$R_3 = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, |x| + |y| \leq \sqrt{2}\}$$

Graficar: $R_1 \cap R_2 \cap R_3$

Resolución:

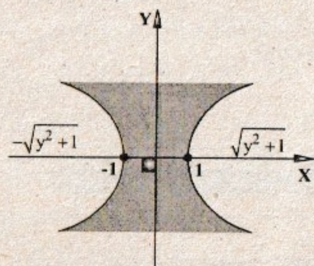
Para R_1: $x^2 - y^2 = 1$

Hipérbola con centro en el origen y eje focal paralelo al eje x de:

$$x^2 - y^2 \leq 1 \iff x^2 \leq y^2 + 1$$

$$|x| \leq \sqrt{y^2+1}$$

$$-\sqrt{y^2+1} \leq x \leq \sqrt{y^2+1}$$



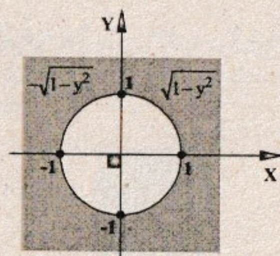
Para R_2: $x^2 + y^2 = 1$

Circunferencia con centro en el origen y radio igual uno de:

$$x^2 + y^2 \geq 1 \iff x^2 \geq 1 - y^2$$

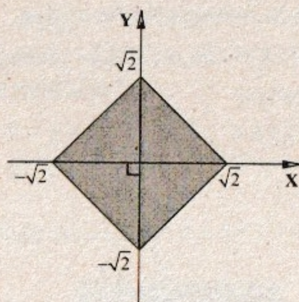
$$|x| \geq \sqrt{1-y^2}$$

$$x \leq -\sqrt{1-y^2} \quad \vee \quad x \geq \sqrt{1-y^2}$$

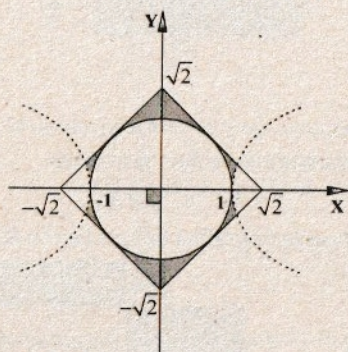


Para R_3: $|x| + |y| = \sqrt{2}$

Cuadrado con centro en el origen y lado igual a 2 de: $|x| + |y| \leq \sqrt{2}$



Finalmente la grafica de $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ será:



PROBLEMA 41

Dados los conjuntos:

$$A = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y \leq 2x^2 + 3\}$$



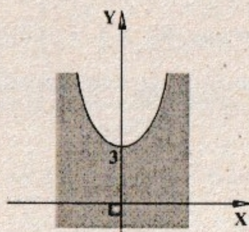
$$B = \left\{(x \, ; \, y) \in \mathbf{R}^2 \, / \, y \geq -\frac{4}{5}x + 4\right\}$$

Graficar: $(A - B) \cup (B - A)$

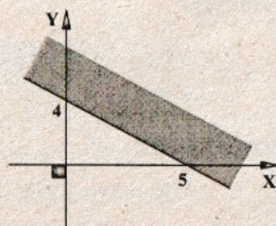
Resolución:

Para el conjunto A: $y - 3 \leq 2x^2$

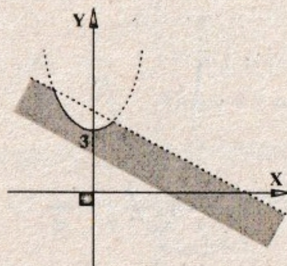
Parábola con vértice en (0 ; 3), eje focal paralelo al eje y, se abre hacia arriba:



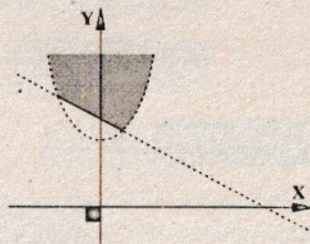
Para el conjunto B: $y \geq -\frac{4}{5}x + 4$



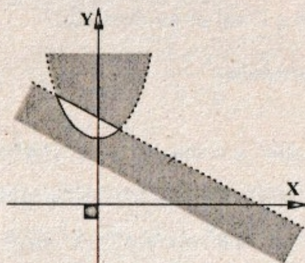
Grafiquemos A – B



Grafiquemos B – A:



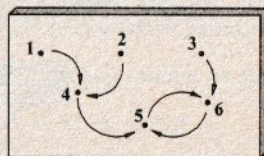
Finalmente la gráfica de: $(A - B) \cup (B - A)$ será:



PROBLEMA 42

Dado el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, se gráfica una función de A en A.

F: A ⟶ A



Indicar la suma de elementos de su rango.

Resolución:

La función dada es:

F = {(1 ; 4), (2 ; 4), (3 ; 6), (4 ; 5), (5 ; 6), (6 ; 5)}

Observar que: $R_F = \{4, 6, 5\}$

E&M



Finalmente tenemos:

$$\Sigma \text{ elementos} = 4 + 6 + 5$$

$$\therefore \quad \boxed{\Sigma\text{elementos} = 15}$$

PROBLEMA 43

Dada la función F: **R**→**R** cuya regla de correspondencia es:

$y = F(x) = \text{sen}\sqrt{(x^2 - a^2)\,|x^2 - b^2|}$ con $a < b$ ¿ Cuál es su dominio?

Resolución:

Para que $y = \text{sen}\sqrt{(x^2 - a^2)\,|x^2 - b^2|}$ sea un número real es necesario que:

$$(x^2 - a^2)|x^2 - b^2| \geq 0$$

Como: $|x^2 - b^2| \geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$ ...(1)

Bastará que:

$$x^2 - a^2 \geq 0 \iff (x + a)(x - a) \geq 0$$

$$x \leq -a \ \vee \ x \geq a$$

De donde: $x \in \langle -\infty ; -a] \cup [a ; \infty\rangle$

Tener en cuenta que de (1):

$$x = b \ \vee \ x = -b \quad \text{pero } a < b$$

$$\therefore \quad \boxed{D_F = \langle -\infty ; -a] \cup [a ; \infty\rangle}$$

PROBLEMA 44

Dada la función F cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 \ ; \ -3 \leq x < 1 & ...F_1 \\ 2x + 3 \ ; \ \ 1 \leq x \leq 3 & ...F_2 \end{cases}$$

Determinar su rango y esbozar su gráfica.

Resolución:

Hallemos el rango correspondiente a F_1:

$$y = 2x^2 - 1$$

$$-3 \leq x < 1 \implies 0 \leq x^2 \leq 9$$

$$0 \leq 2x^2 \leq 18 \iff -1 \leq 2x^2 - 1 \leq 17$$

$$-1 \leq y \leq 17 \iff y \in [-1 ; 17]$$

Observar que: $R_{F_1} = [-1 ; 17]$

Hallemos el rango correspondiente a F_2:

$$y = 2x + 3$$

$$1 \leq x \leq 3 \iff 2 \leq 2x \leq 6$$

$$5 \leq 2x + 3 \leq 9$$

$$5 \leq y \leq 9 \iff y \in [5 ; 9]$$

Observar que: $R_{F_2} = [5 ; 9]$

Se sabe que:

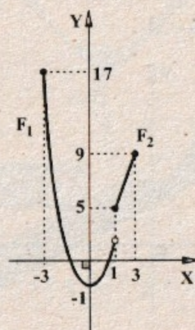
$$R_F = R_{F_1} \cup R_{F_2}$$

$$\implies R_F = [-1 ; 17] \cup [5 , 9]$$

De donde obtenemos

$$R_F = [-1 ; 17]$$

Ahora veamos la gráfica de F:





PROBLEMA 45

Esbozar la gráfica de la función F, donde:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = |x-1| + x$

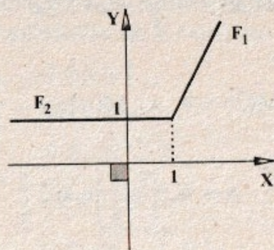
Resolución:

Redefiniendo la función tenemos:

$$y = F(x) = \begin{cases} x - 1 + x & ; \ x - 1 \geq 0 \\ -x + 1 + x & ; \ x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$y = F(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ; \ x \geq 1 \quad ...F_1 \\ 1 & ; \ x < 1 \quad ...F_2 \end{cases}$$

Finalmente la gráfica de F será:



PROBLEMA 46

Determinar el rango de la función F cuya regla de correspondencia viene dada por:

$$y = F(x) = |\text{sen}x| + \text{sen}x \ ; 0 \leq x \leq 360$$

Resolución:

Redefiniendo la función en 2 casos, veamos:

I) $0 \leq x < 180 \implies y = F(x) = \text{sen}x + \text{sen}x$

$$F(x) = 2\ \text{sen}x$$

Observar que $F(x)_{\text{máx}} = 2(1) \implies F(x)_{\text{máx}} = 2$

II) $180 \leq x \leq 360 \implies y = F(x) = -\text{sen}x + \text{sen}x$

$$F(x) = 0$$

Observar que $F(x)_{\text{mín}} = 0$

De (I) y (II) se concluye que:

$$0 \leq F(x) \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 2 \iff y \in [0 ; 2]$$

$$\therefore \quad \boxed{R_F = [0 ; 2]}$$

PROBLEMA 47

Determinar el dominio de la función F cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{2x-6}$$

Resolución:

Observar que:

$$y \in \mathbf{R} \iff x - 1 \geq 0 \wedge 4 - x \geq 0 \wedge 2x - 6 \neq 0$$

$$\underbrace{x \geq 1 \ \wedge \ x \leq 4} \ \wedge \ x \neq 3$$

$$1 \leq x \leq 4 \ \wedge \ x \neq 3$$

De donde obtenemos: $x \in [1 ; 4] - \{3\}$

$$\therefore \quad \boxed{D_F = [1 ; 4] - \{3\}}$$

PROBLEMA 48

Si el rango de:

$y = F(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ es $[a ; b\rangle$. Calcular "a + b"

Resolución:

Observar que:

$$y = \frac{x^2}{x^2+1} \iff y = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Se sabe que : $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$, de donde planteamos:

$$0 \leq x^2 < \infty$$
$$1 \leq x^2 + 1 < \infty$$
$$0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$
$$-1 \leq -\frac{1}{x^2+1} < 0$$
$$0 \leq 1 - \frac{1}{x^2+1} < 1$$
$$0 \leq y < 1 \iff y \in [0\,;\,1\rangle$$

De donde obtenemos:

$$R_F = [0\,;\,1\rangle$$

Por condición: $a = 0 \wedge b = 1$

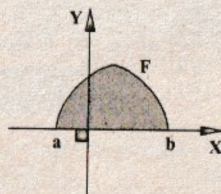
$$\therefore \quad \boxed{a + b = 1}$$

PROBLEMA 49

Calcular el área debajo de la curva $F(x) = -x^2 + 2x + 3$ y encima del eje x sabiendo que dicha área se expresa por:

$$A = M(b) - M(a)$$

Donde: $M(x) = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x$



Resolución:

Observar que los valores de "a" y "b" se obtienen resolviendo la siguiente ecuación $F(x) = 0$, es decir:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x-3)(x+1) = 0$$

De donde tenemos:

$$x = -1 \implies a = -1$$
$$x = 3 \implies b = 3$$

Finalmente el área: $A = M(b) - M(a)$ viene dada por:

$$A = M(3) - M(-1)$$

como: $M(x) = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x$

$$M(3) = 9 \ \wedge \ M(-1) = -\frac{5}{3}$$

$$A = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = 9 + \frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad \boxed{A = \frac{32}{3}\mu^2}$$

PROBLEMA 50

Considerar la función F con máximo dominio posible cuya regla de correspondencia es: $y = F(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$. Determinar su rango.

Resolución:

Hallemos el dominio de la función, para lo cual planteamos

$$y \in \mathbf{R} \iff 2 + x \geq 0 \ \wedge \ 2 - x \geq 0$$
$$x \geq -2 \ \wedge \ x \leq 2$$



$$-2 \leq x \leq 2$$

Observar que:

$$x \in [-2\,;2] \quad \Longrightarrow \quad D_F = [-2\,;2]$$

Mediante la transformación de radicales simples a dobles, la regla de correspondencia de F se podrá expresar así:

$$y = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$$

$$y = \sqrt{(2+x)+(2-x)+2\sqrt{(2+x)(2-x)}}$$

$$y = \sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}}$$

Ahora formaremos la extensión de y a partir de la extensión de x, veamos:

$$-2 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq x^2 \leq 4$$
$$-4 \leq -x^2 \leq 0$$
$$0 \leq 4-x^2 \leq 4$$
$$0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2$$
$$0 \leq 2\sqrt{4-x^2} \leq 4$$
$$4 \leq 4+2\sqrt{4-x^2} \leq 8$$
$$2 \leq \sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}} \leq 2\sqrt{2}$$

$$2 \leq y \leq 2\sqrt{2} \quad \Longleftrightarrow \quad y \in [\,2\,;\,2\sqrt{2}\,]$$

De donde tenemos: $R_F = [2\,;\,2\sqrt{2}\,]$

PROBLEMA 51

Dada la función F, cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \begin{cases} 0 & ; \; x \in \langle 0\,;1\rangle \\ 1 & ; \; x \in [1\,;2\rangle \cup \langle 4\,;5\rangle \\ 2 & ; \; x = 2 \\ 3 & ; \; \langle 2\,;3\rangle \end{cases}$$

Podemos afirmar que es:

I) No creciente en $\langle 0\,;2]$

II) No creciente en $\langle 2\,;5\rangle$

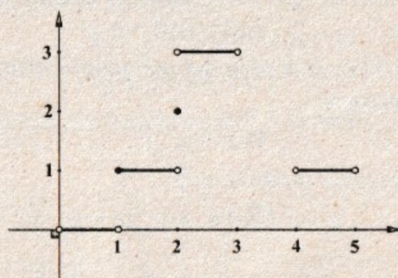
III) No decreciente en $\langle 2\,;5\rangle$

IV) Constante en $\langle 1\,;3\rangle$

V) No decreciente en $\left\langle \frac{3}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right\rangle$

Resolución:

Graficando la función:



Podemos observar que F es no decreciente en $\left\langle \frac{3}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right\rangle$

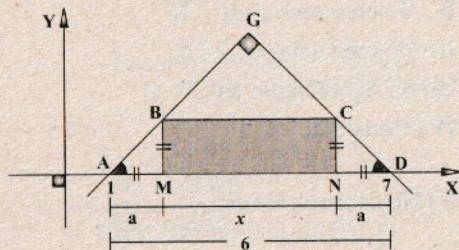
PROBLEMA 52

En la región determinada por el eje "x" y la gráfica de la función G cuya regla de correspondencia es: $G(x) = 3 - |x-4|$ se inscribe un rectángulo una de cuyas bases está sobre el eje "x" y los otros dos vértices están en la gráfica de G. Calcular

el área máxima de dicho rectángulo.

Resolución:

Teniendo en cuenta al enunciado podemos esbozar una gráfica, veamos:



Observar que ◺AMB es isósceles, luego: $AM = MB = a$

Si F(x) es el área del rectángulo MBCN, tenemos:

$$F(x) = x \cdot a \qquad ...(1)$$

observar también que:

$$a + x + a = 6 \implies 2a = 6 - x$$

De donde tenemos: $a = \dfrac{6-x}{2}$

Reemplazando (2) en (1):

$$F(x) = x\left(\frac{6-x}{2}\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(6x - x^2)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}[9 - (x-3)^2]$$

Ahora podemos observar que si $F(x)$ es máximo entonces $(x-3)^2$ deberá ser mínimo, es decir $(x-3)^2 = 0$

$$F(x)_{\text{máx}} = \frac{1}{2}[9 - 0]$$

$$\therefore \quad \boxed{F(x)_{\text{máx}} = \frac{9}{2}\mu^2}$$

PROBLEMA 53

Dada la función F, donde:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = 3x^2 - 12x + 13$,
$x \in [3, 5]$. ¿es inyectiva?

Resolución:

De acuerdo con la definición F será inyectiva si se cumple:

$$\forall x_1 \wedge x_2 \in D_F \,/\, F(x_1) = F(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Observar que:

$$F(x) = 3x^2 - 12x + 13, \quad D_F = [3\,;\,5]$$

Planteamos: $F(x_1) = F(x_2)$

$$3x_1^2 - 12x_1 + 13 = 3x_2^2 - 12x_2 + 13$$

$$3x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_1 + 12x_2 = 0$$

$$3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - 12(x_1 - x_2) = 0$$

$$3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) = 0$$

De donde: $x_1 = x_2 \;\vee\; x_1 + x_2 = 4 \quad ...(1)$

Pero según el dominio:

$$x_1 \in [3\,;\,5] \iff 3 \le x_1 \le 5$$

Asimismo también tenemos

$$x_2 \in [3\,;\,5] \iff 3 \le x_2 \le 5$$



De donde podemos notar que:

$$6 \leq x_1 + x_2 \leq 10$$

Con lo cual en (1) solo se verifica: $x_1 = x_2$

$\therefore$ **F es una función inyectiva**

PROBLEMA 54

Sean F y G dos funciones cuyas reglas de correspondencias son $y = F(x) = x^2 \wedge y = G(x) = |2x|$ esbozar la gráfica de: F + G.

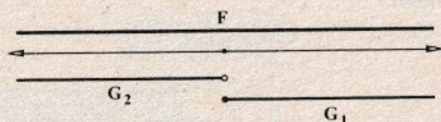
Resolución:

Para la función F: $y = F(x) = x^2 \;; x \in \mathbf{R}$

Para la función G:

$$y = G(x) = \begin{cases} 2x \;;\; x \geq 0 & \text{...}G_1 \\ -2x \;;\; x < 0 & \text{...}G_2 \end{cases}$$

Hallemos la intersección de los dominios:



Como existe $F \cap G_2$, luego existe $F + G_2$ en $\langle -\infty \,;\, 0\rangle$

Como existe $F \cap G_1$, luego existe $F + G_1$ en $[0 \,;\, \infty\rangle$

$$(F+G)(x) = \begin{cases} x^2 - 2x \,;\, x \in \langle -\infty \,;\, 0\rangle & \text{...}F + G_2 \\ x^2 + 2x \,;\, x \in [0 \,;\, \infty\rangle & \text{...}F + G_1 \end{cases}$$

$$(F+G)(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 \,;\, x \in \langle -\infty \,;\, 0\rangle \text{...}F + G_2 \\ (x+1)^2 - 1 \,;\, x \in [0 \,;\, \infty\rangle \text{...}F + G_1 \end{cases}$$

Ahora determinaremos el rango de F + G

Para $F + G_2$:

$$x \in \langle -\infty \,;\, 0\rangle \iff -\infty < x < 0$$
$$-\infty < x - 1 < -1$$
$$1 < (x-1)^2 < \infty$$
$$0 < (x-1)^2 - 1 < \infty$$

De donde se observa que el rango es $\langle 0 \,;\, \infty\rangle$

Para $F + G_1$:

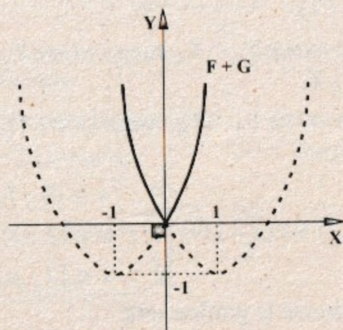
$$x \in [0 \,;\, \infty\rangle \iff 0 \leq x < \infty$$
$$1 \leq x + 1 < \infty$$
$$1 \leq (x+1)^2 < \infty$$
$$0 \leq (x+1)^2 - 1 < \infty$$

De donde se observa que el rango es $[0 \,;\, \infty\rangle$.

Con lo cual tenemos:

$$R_{F+G} = \langle 0 \,;\, \infty\rangle \cup [0 \,;\, \infty\rangle$$
$$R_{F+G} = [0 \,;\, \infty\rangle$$

Finalmente la gráfica de F + G será



PROBLEMA 55

Sea F la función cuya regla de correspondencia es

$$F(x - a) = \begin{cases} 0 \;;\; 0 < x < a \\ 1 \;;\; x \geq a \end{cases}$$

Esbozar la gráfica de:

$$y = F(x-1) + F(x-2)$$

Resolución:

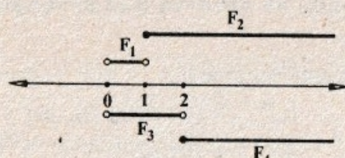
Para $F(x-1)$:

$$F(x-1) = \begin{cases} 0\ ;\ 0 < x < 1 & ...F_1 \\ 1\ ;\ x \geq 1 & ...F_2 \end{cases}$$

Para $F(x-2)$:

$$F(x-2) = \begin{cases} 0\ ;\ 0 < x < 2 & ...F_3 \\ 1\ ;\ x \geq 2 & ...F_4 \end{cases}$$

Hallemos la intersección de los dominios.



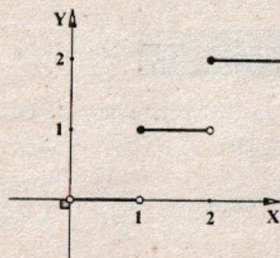
Como existe $F_1 \cap F_3$, luego existe $F_1 + F_3$ en $\langle 0 ; 1\rangle$

Como existe $F_2 \cap F_3$, luego existe $F_2 + F_3$ en $[1 ; 2\rangle$

Como existe $F_2 \cap F_4$, luego existe $F_2 + F_4$ en $[2 ; \infty\rangle$

$$F(x-1) + F(x-2) = \begin{cases} 0\ ;\ x \in \langle 0 ; 1\rangle \\ 1\ ;\ x \in [1 ; 2\rangle \\ 2\ ;\ x \in [2 ; \infty\rangle \end{cases}$$

Finalmente la gráfica será:



PROBLEMA 56

Determinar el rango de la función F, cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$$

Resolución:

Inicialmente determinaremos el dominio y luego formaremos el rango, veamos:

$$y \in \mathbf{R} \iff 1-\sqrt{1-x} \geq 0 \quad \wedge \quad 1-x \geq 0$$

$$1 \geq \sqrt{1-x} \quad \wedge \quad 1 \geq x$$

$$x \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 1 \iff x \in [0 ; 1]$$

De donde tenemos: $D_F = [0 ; 1]$

Ahora procedemos a formar el rango:

$y = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ a partir del dominio, veamos:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq -x \leq 0$$

$$0 \leq 1-x \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$$

$$-1 \leq -\sqrt{1-x} \leq 0$$

$$0 \leq 1-\sqrt{1-x} \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{1-\sqrt{1-x}} \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1 \iff y \in [0 ; 1]$$

$$\therefore \quad \boxed{R_F = [0 ; 1]}$$



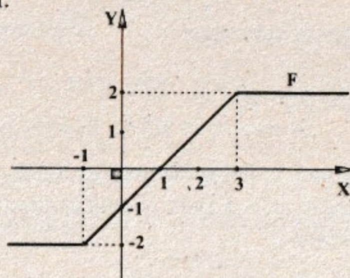
PROBLEMA 57

Gráficar e indicar el rango de la función F cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \begin{cases} -2 \ ; \ x \leq -1 & ...F_1 \\ x-1 \ ; \ -1 < x < 3 & ...F_2 \\ 2 \ ; \ x \geq 3 & ...F_3 \end{cases}$$

Resolución:

Observar que F_1 y F_3 son funciones constantes, mientras que F_2 es una función lineal.



Finalmente podemos notar que:

$$R_F = [-2 ; 2]$$

PROBLEMA 58

Si el dominio de la función F, cuya regla de correspondencia viene dada por:

$$y = F(x) = \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{7x-x^2-12}} \text{ es } [a ; b\rangle - \{c\},$$

calcular: a + b + c

Resolución:
Se plantea:

$$y \in \mathbf{R} \iff \frac{x^2-5x+6}{7x-x^2-12} \geq 0$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} \leq 0 \iff \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \leq 0$$

Observar que $x \neq 3$, luego:

$$\frac{x-2}{x-4} \leq 0 \iff 2 \leq x < 4$$

Es decir en verdad tenemos:

$2 \leq x < 4 \wedge x \neq 3 \iff x \in [2 ; 4\rangle - \{3\}$

$D_F = [2 ; 4\rangle - \{3\}$

Por condición: $a = 2, b = 4 \wedge c = 3$

$$\therefore \quad a + b + c = 9$$

PROBLEMA 59

Esbozar la gráfica de la función F, cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \frac{x + |x|}{|x|}$$

Resolución:

Redifiniendo la función:

Si $x > 0$ entonces:

$$y = F(x) = \frac{x+x}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

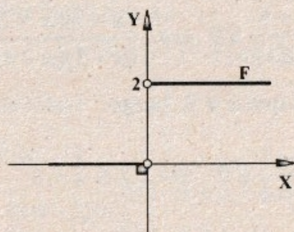
Si $x < 0$ entonces:

$$y = F(x) = \frac{x-x}{-x} = \frac{0}{-x} = 0$$

$$y = F(x) = \begin{cases} 2 \ ; \ x > 0 \\ 0 \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

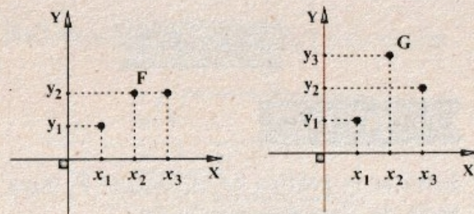


Finalmente la gráfica será:



PROBLEMA 60

A continuación se muestra la gráfica de dos funciones:



¿Cuál de ellas corresponde a una función biyectiva?

Resolución:

De acuerdo con la definición una función es biyectiva si y solamente si es inyectiva y suryectiva a la vez, luego notamos que F no es inyectiva por lo tanto no es biyectiva. G es inyectiva y suryectiva por lo tanto es biyectiva.

$\therefore$ **G es biyectiva**

PROBLEMA 61

Dadas las funciones:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = 2x + 1$; $-5 \leq x < 10$

G: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = G(x) = x^2 + 4$; $-3 < x \leq 4$

Determinar: $G \div F$

Resolución:

Hallemos el dominio de la función $G \div F$, para lo cual se plantea lo siguiente:

$D_{G/F}$: $D_G \cap D_F \;\; \wedge \;\; F(x) \neq 0$

$D_{G/F}$: $\underbrace{-5 \leq x < 10 \wedge -3 < x \leq 4}$ $\wedge$ $2x + 1 \neq 0$

$D_{G/F}$:

$$-3 < x \leq 4 \wedge x \neq -\frac{1}{2} \iff x \in \langle -3\,;4] - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

De donde tenemos:

$$D_{G/F} = \langle -3\,;4] - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Hallemos la regla de correspondencia de la función $G \div F$ para lo cual se plantea lo siguiente:

$$y = \left(\frac{G}{F}\right)(x) = \frac{G(x)}{F(x)}$$

$$y = \left(\frac{G}{F}\right)(x) = \frac{x^2 + 4}{2x + 1}$$

Finalmente tenemos:

$$\frac{F}{G} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \; / \; y = \left(\frac{G}{F}\right)(x) = \frac{x^2 + 4}{2x + 1} \; ;$$

$$x \in \langle -3\,;4] - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

PROBLEMA 62

En una aula de clases de 40 alumnos las notas van de 0 a 20 y son números enteros, se



dan las siguientes relaciones.

$R_1 = \{$(nombre del alumno ; nota del alumno)$\}$

$R_2 = \{$(nota del alumno ; nombre del alumno)$\}$

Luego se cumple que:

I) R_1 y R_2 son funciones

II) Sólo R_1 es función

III) Sólo R_2 es función

IV) R_1 y R_2 no son funciones

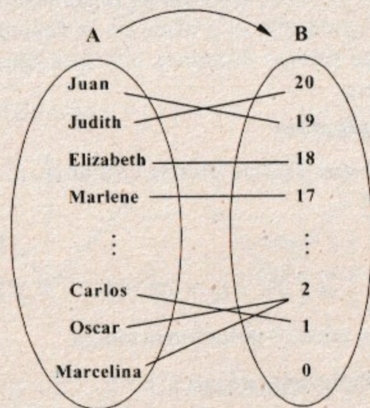
Resolución:

Sean los conjuntos

A = {nombre de los 40 alumnos}

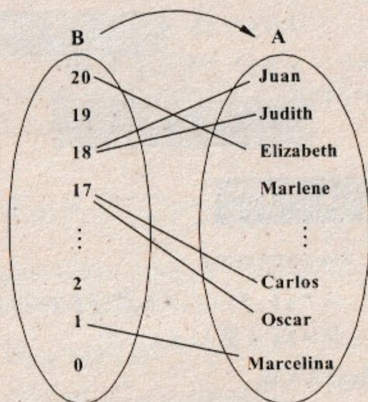
B = {nota de los alumnos}

Ahora hagamos un posible gráfico de R_1:



Notar que para cada elemento de "A" le corresponde un único elemento de "B" (puede haber 2 o más alumnos con la misma nota) R_1 es función.

Ahora hagamos un posible gráfico de R_2:



Notar que para un elemento de "B" le pueden corresponder varios elementos de "A" (puede haber 2 o más alumnos con la misma nota) R_2 no es función.

$\therefore$ Sólo R_1 es función (II)

PROBLEMA 63

Dada la función F definida así:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = x^2 - 1$;

$x \in [-4 ; -2] \cup [-1 ; 1]$

Determinar su rango.

Resolución:

Formaremos: $y = x^2 - 1$ a partir de la extensión de x, veamos:

Condición:

$$x \in [-4 ; -2] \cup [-1 ; 1]$$

$$\Longleftrightarrow \quad -4 \le x \le -2 \ \vee \ -1 \le x \le 1$$

$$4 \le x^2 \le 16 \ \vee \ 0 \le x^2 \le 1$$

$$3 \le x^2 - 1 \le 15 \ \vee \ -1 \le x^2 - 1 \le 0$$

$$3 \le y \le 15 \;\vee\; -1 \le y \le 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y \in [3;15] \cup [-1;0]$$

$$\therefore \quad \boxed{R_F = [-1;0] \cup [3;15]}$$

PROBLEMA 64

Sean los conjuntos:

$$A = \{1, 4\} \cup \{x \in \mathbf{R} / 2 \le x \le 3\}$$

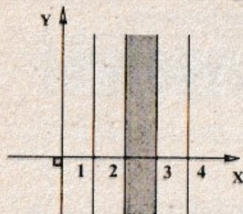
$$B = \{x \in \mathbf{R} / 1 \le x \le 2\}$$

Gráficar A × B.

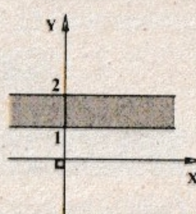
Resolución:

Se sabe que $A \times B = \{(x; y)/x \in A \wedge y \in B\}$, luego para cada conjunto tenemos:

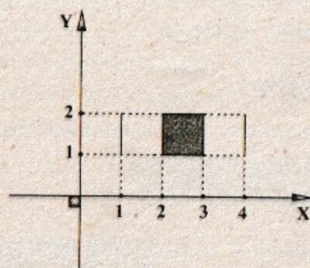
A:



B:



Finalmente la gráfica de A × B será:



PROBLEMA 65

Sea F una función creciente cuya regla de correspondencia es $y = F(x) = ax + b$ tal que $F([1;2]) = [107;901]$. Calcular a – b

Resolución:

Como F es una función creciente se cumple:

$F(1) = 107 \quad \longrightarrow \quad a + b = 107 \quad ...(1)$

$F(2) = 901 \quad \longrightarrow \quad 2a + b = 901 \quad ...(2)$

Resolviendo el sistema formado con (1) y (2) tenemos:

$$a = 794 \;\wedge\; b = -687$$

$$\therefore \quad \boxed{a - b = 1481}$$

PROBLEMA 66

Dada la función lineal F cuya regla de correspondencia es $y = F(x) = mx$ y la circunferencia cuya ecuación es $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$. Determinar la extensión de "m" para que la gráfica de la función F tenga puntos comunes con la circunferencia.

Resolución:

Para que existan puntos comunes, el sistema.

$$\begin{cases} y = mx & ...(1) \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1 & ...(2) \end{cases}$$

Debe admitir soluciones reales:

Reemplazando (1) en (2):

$$(x-2)^2 + (mx+1)^2 = 1$$

$$x^2 - 4x + 4 + m^2x^2 + 2mx + 1 = 1$$

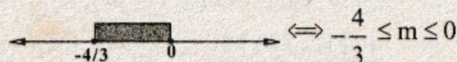
$$(m^2+1)x^2 + (2m-4)x + 4 = 0$$

Como $x \in \mathbf{R}$, el discriminante de la ecuación cuadrática formada deberá ser no



negativo, veamos:

$$(2m-4)^2-4(m^2+1)(4)\geq 0$$
$$4m^2-16m+16-16m^2-16\geq 0$$
$$-12m^2-16m\geq 0$$
$$3m^2+4m\leq 0$$
$$m(3m+4)\leq 0$$



$\iff -\frac{4}{3}\leq m\leq 0$

$\therefore \quad m\in\left[-\frac{4}{3}\ ;\ 0\right]$

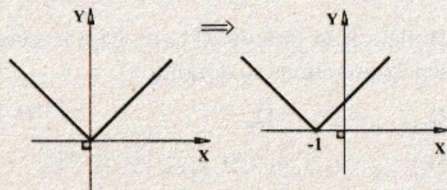
PROBLEMA 67

Esbozar la gráfica de la función G, cuya regla de correspondencia es:

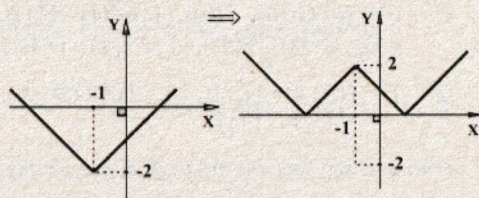
$$y=G(x)=||x+1|-2|$$

Resolución:

Inicialmente $y=|x|$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $y=|x+1|$



$y=|x+1|-2$ $\quad\Longrightarrow\quad$ Finalmente $y=||x+1|-2|$



PROBLEMA 68

Dadas las funciones F y G cuyas reglas de correspondencias son:

$$y=F(x)=\sqrt{x-a}\ \wedge\ y=G(x)=\frac{1}{\sqrt{b-x^2}},$$

tal que: $F(2)=2G(0)=1$. Luego no es correcto afirmar que:

I) $D_{F.G}=[1\ ;2\rangle$

II) $(F.G)(0)$ no esta definido

III) $(F.G)(3)$ no existe

IV) $(F.G)(2)$ existe

Resolución:

Con el auxilio de las condiciones dadas determinaremos los valores de "a" y "b".

Para F:

$$F(x)=\sqrt{x-a}\ \longrightarrow\ F(2)=\sqrt{2-a}$$
$$1=\sqrt{2-a}\ \longrightarrow\ a=1$$

Luego tenemos:

$$F(x)=\sqrt{x-1}\ ;\ D_F=[1\ ;\infty\rangle$$

Para G:

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{b-x^2}}\ \longrightarrow\ G(0)=\frac{1}{\sqrt{b}}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{b}}\ \longrightarrow\ b=4$$

luego tenemos:

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ ;\ D_G=\langle -2\ ;2\rangle$$

Ahora determinaremos la función F.G, veamos:

$F.G : \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) \cdot G(x) \ ; x \in D_F \cap D_G$

$F.G : \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{4-x^2}}$;

$x \in [1 ; \infty\rangle \cap \langle -2 ; 2\rangle$

$F.G : \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = (F . G)(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{4-x^2}}$;

$x \in [1 ; 2\rangle$

Finalmente al analizar cada proposición dada se concluye que no es correcto afirmar IV.

PROBLEMA 69

Sea:

$$F(x) = \begin{cases} -4x+7 \ ; \ x<0 & ...F_1 \\ 4x+1 \ ; 0<x<2 & ...F_2 \\ 2x+3 \ ; \ x \geq 2 & ...F_3 \end{cases}$$

Determinar: $F(4T) - F(2T-1)$, si: $T \in \langle \frac{3}{4} \ ; 1\rangle$

Resolución:

Analicemos al intervalo de variación de cada término de la expresión buscada con la finalidad de escoger a su regla de correspondencia.

Para F(4T): $\frac{3}{4} < T < 1 \ \to \ 3 < 4T < 4$

observar que F(4T) se obtendrá de $F(x) = 2x + 3$, es decir:

$F(4T) = 2(4T) + 3 \ \to \ F(4T) = 8T + 3$

Para F(2T – 1):

$\frac{3}{4} < T < 1 \to \ \frac{3}{2} < 2T < 2$

$\frac{3}{2} - 1 < 2T - 1 < 2 - 1 \to \ \frac{1}{2} < 2T - 1 < 1$

Observar que F(2T – 1) se obtiene de $F(x) = 4x + 1$, es decir:

$F(2T-1) = 4(2T-1) + 1$

$\to \ F(2T-1) = 8T - 3$

Finalmente tenemos:

$F(4T) - F(2T-1) = 8T + 3 - (8T - 3)$

$\therefore \ F(4T) - F(2T-1) = 6$

PROBLEMA 70

Hállese la suma de los elementos del rango de la función $G^2 - F$ siendo:

$F(x) = 3x - 1 \ ; x \geq 0$

$G = \{(-3 ; 6), (4 ; -2), (2 ; 3), (0 ; 2), (1 ; 5), (-2 ; 1)\}$

Resolución:

Hallemos la función $G^2 - F$, para lo cual determinaremos su dominio:

$D_{G^2-F} = D_G \cap D_F$

$D_{G^2-F} = \{-3, 4, 2, 0, 1, -2\} \cap [0 ; \infty\rangle$

$D_{G^2-F} = \{0, 1, 2, 4\}$

Ahora la función $G^2 - F$ viene dada por:

$G^2 - F = \{(0 ; G^2(0) - F(0)), (1 ; G^2(1) - F(1)), (2 ; G^2(2) - F(2)), (4 ; G^2(4) - F(4))\}$

$G^2 - F = \{(0 ; 4 + 1), (1 ; 25 - 2), (2 ; 9 - 5), (4 ; 4 - 11)\}$

$G^2 - F = \{(0 ; 5), (1 ; 23), (2 ; 4), (4 ; -7)\}$



Observar que:

$$R_{G^2-F} = \{5, 23, 4, -7\}$$

$\therefore$ $\Sigma elementos = 25$

PROBLEMA 71

Sean las funciones

$F = \{(-1\,;1), (2\,;0), (1\,;-1), (5\,;-1), (3\,;1)\}$

$G = \{(3\,;0), (5\,;4), (1\,;0), (-1\,;2)\}$

¿Cuántas valores distintos asume y_o si:

$$\left(\frac{F^2 \cdot G}{G}\right)(x_0) = y_0\,?$$

Resolución:

Hagamos: $H = \dfrac{F^2 \cdot G}{G}$, ahora hallemos el dominio de H

Para el numerador:

$D_F \cap D_G = \{-1, 2, 1, 5, 3\} \cap \{3, 5, 1, -1\}$

$D_F \cap D_G = \{-1, 1, 3, 5\}$ ...(I)

Para el denominador se debe cumplir que $G(x) \neq 0$, lo cual se obtiene siempre y cuando:

$D_G = \{5, -1\}$ ...(II)

Observar que el dominio de H viene dado por la intersección de (I) y (II) es decir:

$D_H = \{-1\,, 5\}$

Ahora en la función dada tenemos:

$$H = \frac{F^2 \cdot G}{G} \iff H = F^2\ ;\ D_H = \{-1\,, 5\}$$

De donde la función H viene dada por:

$H = \{(-1\,; F^2(-1)), (5\,; F^2(5))\}$

$H = \{(-1\,; 1), (5\,; 1)\}$

Finalmente se concluye que:

$$H(x_0) = y_0 = 1$$

$\therefore$ y_0 asume sólo un valor.

PROBLEMA 72

Para qué valor de "m" se verifica:

$(F^2 + H)(m) = 11$, si:

$F(x) = \sqrt{x+4}\ ; x \in [-4\,; 4]$

$H = \{(-3\,;0), (1\,;4), (2\,;3), (-2\,;-2), (-1\,;3), (3\,,4)\}$

Resolución:

Hallemos el dominio de la función $F^2 + H$ de la manera siguiente:

$$D_{F^2+H} = D_F \cap D_H$$

De donde: $D_{F^2+H} = \{-3, 1, 2, -2, -1, 3\}$

Con lo cual:

$F^2 + H = \{(-3\,; 1), (1\,; 9), (2\,; 9), (-2\,; 0), (-1\,; 6), (3\,; 11)\}$

Observar que: $(F^2 + H)(3) = 11$

Por condición: $(F^2 + H)(m) = 11$

$\therefore$ $m = 3$

PROBLEMA 73

Dadas las funciones:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 1\,; x \geq 1 \\ x + 1\,; x < 1 \end{cases}$$

$G = \{(0\,; 3), (1\,; 4), (2\,; 3)\}$

Encuentre la suma de los elementos del rango de la siguiente función: $\dfrac{F^2 - F \cdot G}{F}$

Resolución:

Hagamos:

$$H = \frac{F^2 - F \cdot G}{F} = \frac{F(F-G)}{F} = F - G \; ; F \neq 0$$

Para el dominio de H se plantea:

$$D_H = D_{F-G} = D_F \cap D_G \; ; F(x) \neq 0$$

$$D_H = \{0, 1, 2\} \; ; F(x) \neq 0$$

Observa que F(1) = 0 con lo cual tenemos una contradicción, en consecuencia:

$$D_H = D_{F-G} = \{0, 2\}$$

Ahora la función H = F – G viene dada por:

$$H = \{(0 ; F(0) - G(0)), (2 ; F(2) - G(2))\}$$

$$H = \{(0 ; 1 - 3), (2 ; 3 - 3)\}$$

$$H = \{(0 ; -2), (2 ; 0)\}$$

$$\therefore \quad \boxed{\Sigma \text{elementos de } R_H = -2}$$

PROBLEMA 74

Determinar el dominio de la función: G o F a partir de :

$$F = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / y = 2 - \sqrt{4-x}\}$$

$$G = \{(5 ; \sqrt{2}), (0 ; 3), (1 ; 5), (2 ; 15), (7 ; 0)\}$$

Resolución:

Se sabe que:

$$D_{GoF} = x \in D_F \wedge F(x) \in D_G \qquad ...(1)$$

Para F: $4 - x \geq 0 \iff x \leq 4$, de donde $D_F = \langle -\infty ; 4]$

Para G: $D_G = \{5, 0, 1, 2, 7\}$

Notar que $F(x) = 2 - \sqrt{4-x}$ y como $F(x) \in D_G$ planteamos:

$$2 - \sqrt{4-x} = 5 \;\longrightarrow\; \nexists\, x \in \mathbf{R}$$

$$2 - \sqrt{4-x} = 0 \;\longrightarrow\; x = 0$$

$$2 - \sqrt{4-x} = 1 \;\longrightarrow\; x = 3$$

$$2 - \sqrt{4-x} = 2 \;\longrightarrow\; x = 4$$

$$2 - \sqrt{4-x} = 7 \;\longrightarrow\; \nexists \in \mathbf{R}$$

Finalmente en (1) se tendrá:

$$D_{GoF} = \langle -\infty ; 4] \cap \{0, 3, 4\}$$

$$\therefore \quad \boxed{D_{GoF} = \{0, 3, 4\}}$$

PROBLEMA 75

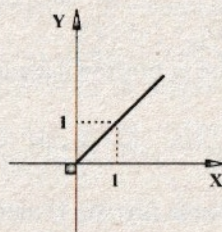
Esbozar aproximadamente la gráfica de F*, sabiendo que:

$$F = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / x + |y| = 2y\}$$

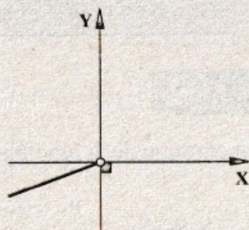
Resolución:

Redefiniendo la función podemos plantear dos casos, veamos:

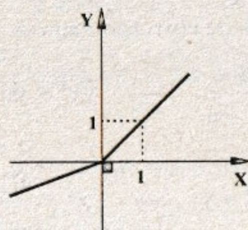
I) si $y \geq 0$ entonces $x + y = 2y \longrightarrow y = x$



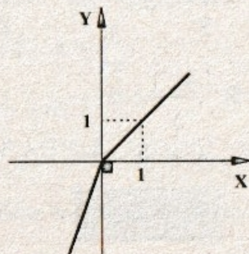
II) si $y < 0$ entonces $x - y = 2y \longrightarrow y = \dfrac{x}{3}$



Ahora la gráfica de F será:



Notar que F es una función inyectiva, luego existe F* cuya gráfica viene dada por:



PROBLEMA 76

Bosquejar la gráfica de F* sabiendo que:

$$F\,(x+1)=\begin{cases} 1+x & ; \quad x \le -1 \\ x^2+2x+1 & ; \quad x > -1 \end{cases}$$

Resolución:

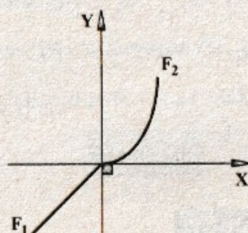
Redefiniendo la función dada

$$F(x+1)=\begin{cases} 1+x & ; \quad x+1 \le 0 \\ (1+x)^2 & ; \quad x+1 > 0 \end{cases}$$

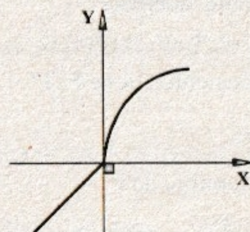
Se tendrá:

$$F(x)=\begin{cases} x & ; \quad x \le 0 \qquad \ldots F_1 \\ x^2 & ; \quad x > 0 \qquad \ldots F_2 \end{cases}$$

Cuya gráfica viene dada por:



De donde finalmente tenemos la gráfica de F*



PROBLEMA 77

Si $\langle -\infty\,; a] \cap [b\,; \infty\rangle$ es el dominio maximal de la función real de variable real F, cuya regla de correspondencia viene dada por:

$y = F(x) = \sqrt{|\,x^2-4\,| + 2x - 4}$. ¿Qué valor asume: b – a?

Resolución:

De la regla de correspondencia se plantea lo siguiente:

$|x^2-4|+2x-4\geq 0 \iff |x^2-4|\geq 4-2x$

De donde:

$$x^2-4\geq 4-2x \;\vee\; x^2-4\leq 2x-4$$

$$x^2+2x-8\geq 0 \;\vee\; x^2-2x\leq 0$$

$$(x+4)(x-2)\geq 0 \;\vee\; x(x-2)\leq 0$$

$$x\in\langle -\infty;-4]\cup[2;\infty\rangle \vee x\in[0;2]$$

Es decir: $x\in\langle -\infty;-4]\cup[0;\infty\rangle$

$\longrightarrow \quad D_F=\langle -\infty;-4]\cup[0;\infty\rangle$

Por condición: $a=-4\wedge b=0$

$\therefore$ $\boxed{b-a=4}$

PROBLEMA 78

Dada la función: $F(x)=\sqrt{2-|x|}$ en su mayor dominio, además:

$G=\{(-3;6),(-2;1),(0;2),(1;5),(2;3),(4;-2)\}$

¿Cuántos elementos tiene F.G?

Resolución:

Veamos el dominio de F:

$$2-|x|\geq 0 \iff |x|\leq 2$$

$$-2\leq x\leq 2 \iff x\in[-2;2]$$

De donde obtenemos: $D_F=[-2;2]$

Además podemos observar:

$$D_G=\{-3,-2,0,1,2,4\}$$

Con lo cual tenemos:

$$D_{F.G}=\{-2,0,1,2\}$$

$F.G=\{(-2;F(-2).G(-2)),(0;F(0).G(0)),$
$(1;F(1).G(1)),(2;F(2).G(2))\}$

$F.G=\{(-2;0),(0;2\sqrt{2}),(1;5),(2;0)\}$

$\therefore$ $\boxed{\text{F.G tiene 4 elementos}}$

PROBLEMA 79

Determinar el rango de la función F, donde:

$$F:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\,/y=F(x)=\frac{n}{x^2+n}\;;n\in\mathbf{R}^+$$

Resolución:

De la regla de correspondencia:

$$y=\frac{n}{x^2+n} \longrightarrow yx^2+yn=n$$

$$x^2y=n(1-y) \longrightarrow x^2=\frac{n(1-y)}{y}$$

Como $x\in\mathbf{R} \longrightarrow x^2\geq 0$

Es decir: $\dfrac{n(1-y)}{y}\geq 0 \iff \dfrac{n(y-1)}{y}\leq 0$

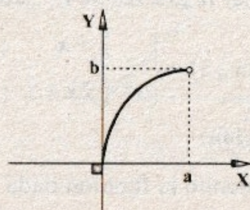
Como $n\in\mathbf{R}^+$ $\dfrac{y-1}{y}\leq 0$

De donde: $y\in\langle 0;1]$

$\therefore$ $\boxed{R_F=\langle 0;1]}$

PROBLEMA 80

El gráfico adjunto



corresponde a $(F \circ G)(x)$

Siendo **n** un entero positivo determinar: sen(ab), sabiendo que:

$F(x) = n\,\text{sen}x\;;\; x \in [0\,;\, \frac{\pi}{2}\rangle$

$G(x) = nx\;;\; x \in \langle -\pi\,;\,\pi\rangle$

Resolución:

Se sabe que:

$D_{F\,o\,G}:\; x \in D_G \wedge G(x) \in D_F$

$D_{F\,o\,G}: x \in \langle -\pi\,;\,\pi\rangle \wedge n\,x \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}\rangle$

$D_{F\,o\,G}: x \in \langle -\pi\,;\,\pi\rangle \wedge x \in [0\,;\,\frac{\pi}{2n}\rangle$

De donde:

$D_{F\,o\,G}: x \in [0\,;\,\frac{\pi}{2n}\rangle \longrightarrow D_{FoG} = [0\,;\,\frac{\pi}{2n}\rangle$

Del gráfico: $a = \frac{\pi}{2n}$

Observar que:

$$(F \circ G)(x) = F(G(x)) = n\,\text{sen}(nx)$$

Del gráfico: $b = n\text{sen}(n.a) = n\text{sen}\left(n\cdot\frac{\pi}{2n}\right)$

$$b = n\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = n(1)$$

$$b = n$$

Finalmente :

$$\text{sen}(ab) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\cdot n\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$\therefore\quad \boxed{\text{sen}(ab) = 1}$

PROBLEMA 81

Consideremos la función F definida asi:

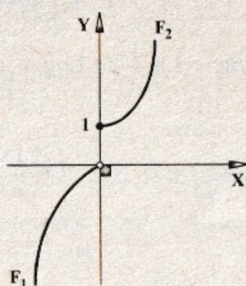
$$F(x) = \begin{cases} -x^2 & ;\; x < 0 \\ x^3 + 1 & ;\; x \geq 0 \end{cases}$$

Luego la inversa de la función F es :

Resolución:

Graficando a la función F:

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 & ;\; x < 0 & \ldots F_1 \\ x^3 + 1 & ;\; x \geq 0 & \ldots F_2 \end{cases}$$



Es evidente que F es inyectiva, luego existe F*

De $F_1: y = -x^2 \longrightarrow \quad x = \sqrt{-y}\;;\; y < 0$

De $F_2: y = x^3 + 1 \longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y-1}\;;\; y \geq 1$

Finalmente tenemos:

$$F^*(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & ;\; x < 0 \\ \sqrt[3]{x-1} & ;\; x \geq 1 \end{cases}$$

PROBLEMA 82

Dada la aplicación:

$F: A \longrightarrow [-1; \infty\rangle / y = F(x) = \text{Log}_{(1/2)}\text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right)$

¿Determinar el conjunto A para que F sea sobreyectiva?

Resolución:

como F es sobreyectiva: $R_F = [-1\ ;\ \infty\rangle$

De donde podemos plantear:

$$y \in [-1\ ;\ \infty\rangle \iff y \geq -1$$

De la regla de correspondencia:

$$\text{Log}_{\left(\frac{1}{2}\right)}\text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right) \geq -1$$

$$\text{Log}_{\left(\frac{1}{2}\right)}\text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right) \geq \text{Log}_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\text{Log}_{\left(\frac{1}{2}\right)}\text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right) \geq \text{Log}_{\left(\frac{1}{2}\right)}(2)$$

$$\text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2 \iff \text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \text{Ln}(e^2)$$

$$\frac{1}{x} \leq e^2 \qquad ...(1)$$

Debemos tener en cuenta:

$y = \text{Log}_{\left(\frac{1}{2}\right)}\text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right)$ existe en **R** si y solo si

$$\text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \ \wedge\ \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right) > \text{Ln}(1) \ \wedge\ \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{1}{x} > 1 \ \wedge\ \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{1}{x} > 1 \qquad ...(2)$$

Ahora de (1) y (2) tenemos:

$$1 < \frac{1}{x} \leq e^2$$

$$\frac{1}{e^2} \leq x < 1$$

$$e^{-2} \leq x < 1 \iff x \in [e^{-2}\ ;\ 1\rangle$$

Observar que $D_F = [e^{-2}\ ;\ 1\rangle$

$$\therefore \quad \boxed{A = [e^{-2}\ ;\ 1\rangle}$$

PROBLEMA 83

Esbozar la gráfica de la función real de variable real F, cuya regla de correspondecia viene dada por:

$$y = F(x) = \text{Sgn}([\![x + 3]\!] - 2)$$

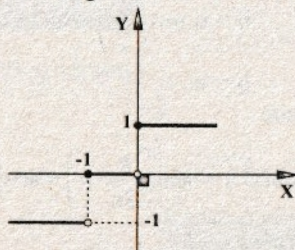
Resolución:

Redefiniendo la función:

$$y = F(x) = \text{sgn}([\![x+3]\!] - 2)\begin{cases} -1\ ; [\![x+3]\!] - 2 < 0 \\ 0\ ; [\![x+3]\!] - 2 = 0 \\ 1 ; [\![x+3]\!] - 2 > 0 \end{cases}$$

$$y = F(x) = \begin{cases} -1\ ;\ x < -1 \\ 0\ ;\ -1 \leq x < 0 \\ 1\ ;\ x \geq 0 \end{cases}$$

Finalmente la gráfica de la función F será:





observación:

Para redefinir el intervalo de variación de la variable independiente x en cada rama de la función se consideró los teoremas relacionados al máximo entero.

I) $[\![x]\!] > n \longrightarrow x \geq n+1$

II) $[\![x]\!] \geq n \longrightarrow x \geq n$

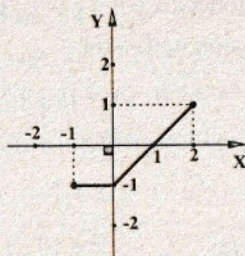
III) $[\![x]\!] < n \longrightarrow x < n$

IV) $[\![x]\!] \leq n \longrightarrow x < n+1$

Donde **n** es un entero.

PROBLEMA 84

Sea la función F cuya gráfica es:



Graficar a la función H, donde
$H(x) = |F(x)|, x \in D_F$

Resolución:

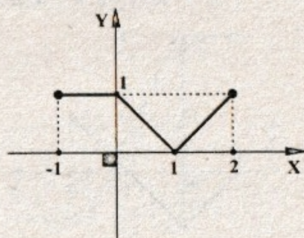
Del gráfico se tiene:

$$y = F(x) = \begin{cases} -1 & ; \ x \in [-1\,;0\rangle \\ x-1 & ; \ x \in [0\,;2] \end{cases}$$

Redefiniendo para H:

$$y = H(x) = |F(x)| = \begin{cases} 1 & ; \ x \in [-1\,;0\rangle \\ -x+1 & ; \ x \in [0\,;1\rangle \\ x-1 & ; \ x \in [1\,;2] \end{cases}$$

Observar que la gráfica de H se obtiene reflejando sobre el eje x la parte de la gráfica de F que esta debajo del eje x.



PROBLEMA 85

Con respecto al ejercicio anterior mostrar la gráfica de $F(|x|)$

Resolución:

Se sabe que:

$$F(x) = \begin{cases} -1 & ; \ x \in [-1\,;0\rangle \\ x-1 & ; \ x \in [0\,;2] \end{cases}$$

Consideremos $G(x) = F(|x|)$, ahora analizaremos dos casos:

I) $-1 \leq x < 0 \longrightarrow |x| = -x$

Es decir: $G(x) = F(-x)$

observar que:

$$-1 \leq x < 0 \longrightarrow 0 < -x \leq 1$$

También notar: $-x \in [0\,;\,1]$ y para este dominio la regla de correspondencia es:

$$F(x) = x-1 \longrightarrow F(-x) = -x-1$$

Es decir $G(x) = -x-1$

II) $0 \leq x \leq 2 \longrightarrow |x| = x$

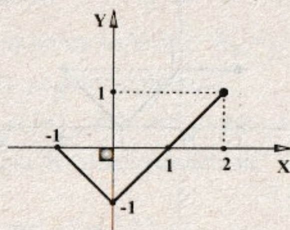
Es decir: $G(x) = F(x)$

$G(x) = x-1$

Ahora de (I) y (II) tenemos:



$$G(x)=\begin{cases}-x-1\ ;\ -1\le x<0\\ x-1\ ;\ 0\le x\le 2\end{cases}$$



PROBLEMA 86

Determinar el dominio de la función real de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$y=F(x)=\frac{\sqrt[4]{1-[\![x]\!]}}{x[\![2x-1]\!]-2x}$$

Resolución:

Se debe cumplir:

$$1-[\![x]\!]\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\![x]\!]\le 1$$

$$x<2 \quad ...(I)$$

También se cumple: $x[\![2x-1]\!]-2x\neq 0$

Suponga usted que:

$$x[\![2x-1]\!]-2x=0 \iff x([\![2x-1]\!]-2)=0$$

$$x=0 \ \vee\ [\![2x-1]\!]=2$$

$$x=0 \ \vee\ 2\le 2x-1<3$$

$$x=0 \ \vee\ \frac{3}{2}\le x<2 \quad ...(II)$$

Observar que los valores que asume "x" seran todos los encontrados en (I) menos los encontrados en (II), es decir:

$$x\in\langle -\infty\ ;0\rangle\cup\langle 0\ ;3/2\rangle$$

$$\therefore \quad D_F=\langle -\infty\ ;0\rangle\cup\langle 0\ ;3/2\rangle$$

PROBLEMA 87

Dada la función:

$F:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\ /\ y=F(x)=[\![x]\!]+\sqrt{x-[\![x]\!]}$, bosquejar la gráfica de F*

Resolución:

Se debe cumplir: $\quad x-[\![x]\!]\ge 0$

Observar que la relación anterior se verifica para todo valor de x,

Es decir $x\in\mathbf{R}$ con lo cual $D_F=\mathbf{R}$

Si: $[\![x]\!]=n$ entonces $n\le x<n+1\ ;\ n\in\mathbf{Z}$

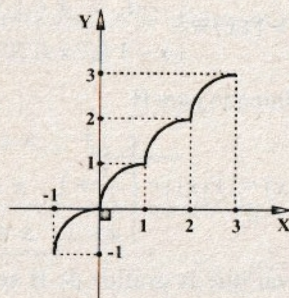
Ahora la función dada será:

$$F(x)=n+\sqrt{x-n}\quad ;x\in[n\ ;n+1\rangle$$

Con algunos valores para n:

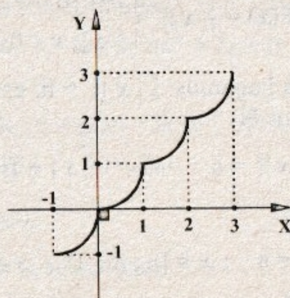
$$F(x)=\begin{cases}-1+\sqrt{x+1} & ;\ x\in[-1\ ;0\rangle\\ \sqrt{x} & ;\ x\in[0\ ;1\rangle\\ 1+\sqrt{x-1} & ;\ x\in[1\ ;2\rangle\\ 2+\sqrt{x-2} & ;\ x\in[2\ ;3\rangle\end{cases}$$

La gráfica de F será:





Finalmente la gráfica de la función F* se obtiene reflejando la gráfica de F con respecto a la recta identida (y = x), veamos:



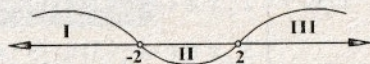
PROBLEMA 88

Determinar el rango y esbozar la gráfica de la función :

F: **R** ⟶ **R** /y = F(x) = | x + 2 | – | x – 2 |

Resolución:

Redefiniendo la función por zonas:



I) $-\infty < x < -2$

$F(x) = -(x+2) + (x-2) \longrightarrow \quad F(x) = -4$

II) $-2 \le x < 2$

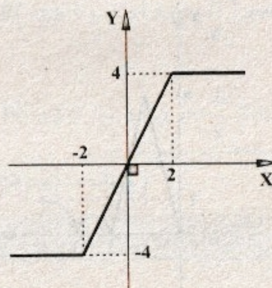
$F(x) = x + 2 + (x-2) \quad \longrightarrow \quad F(x) = 2x$

III) $2 \le x < \infty$

$F(x) = x + 2 - (x-2) \quad \longrightarrow \quad F(x) = 4$

$$F(x) = \begin{cases} -4 & ; \quad x < -2 \\ 2x & ; \quad -2 \le x < 2 \\ 4 & ; \quad x \ge 2 \end{cases}$$

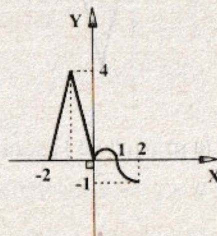
Finalmente la gráfica de F será:



$\therefore \quad$ $R_F = [-4\,;4]$

PROBLEMA 89

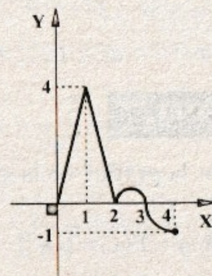
A continuación se muestra la gráfica de la función real de variable real F: y = F(x)



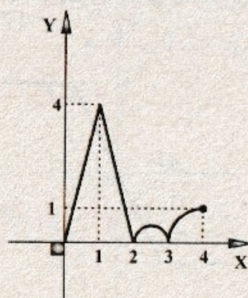
Trazar la gráfica de la función H, definida por H(x) = 4 – | F(x – 2)|

Resolución:

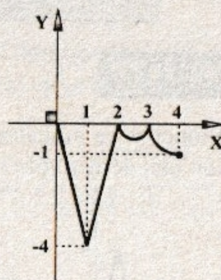
La gráfica de F(x – 2) será:



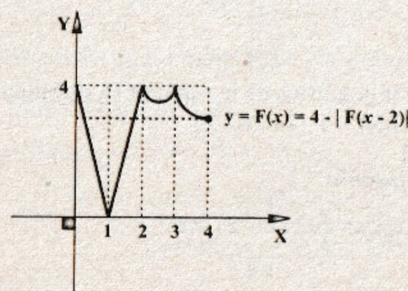
La gráfica de $|F(x-2)|$ será:



La gráfica de $-|F(x-2)|$ será:



Finalmente la gráfica de H será:



PROBLEMA 90

Bosquejar la gráfica de la siguiente función:

F: **R** ⟶ **R** /$y = F(x) = [\![|x|]\!]$

Resolución:

Redefiniendo la función:

$$F(x) = [\![|x|]\!] \begin{cases} [\![x]\!] ; x \geq 0 \\ [\![-x]\!] ; x < 0 \end{cases}$$

Ahora hagamos: $[\![|x|]\!] = n$, es evidente que $n \in \mathbf{N}$

$$[\![|x|]\!] = n \quad \longrightarrow \quad |x| \in [n ; n+1\rangle$$

Luego:

$[\![|x|]\!] = n \quad ; x \in [n ; n+1\rangle \wedge x \geq 0 \quad ...(1)$

$[\![|-x|]\!] = n \quad ; -x \in [n ; n+1\rangle \wedge x < 0$

$[\![|-x|]\!] = n \quad ; x \in \langle -n-1 ; -n] \wedge x < 0 \quad ...(2)$

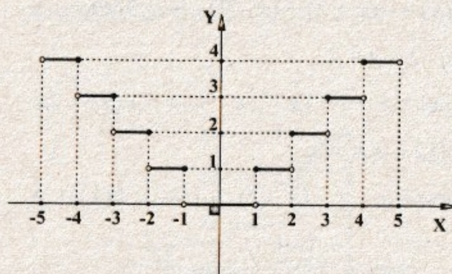
De (1) y (2):

$F(x) = [\![|x|]\!] = n ; x \in \langle -n-1 ; -n] \vee [n ; n+1\rangle$

Tomando algunos valores para n tenemos:

$$F(x) = \begin{cases} 0 ; x \in \langle -1 ; 0] \cup [0 ; 1\rangle \\ 1 ; x \in \langle -2 ; -1] \cup [1 ; 2\rangle \\ 2 ; x \in \langle -3 ; -2] \cup [2 ; 3\rangle \\ 3 ; x \in \langle -4 ; -3] \cup [3 ; 4\rangle \\ 4 ; x \in \langle -5 ; -4] \cup [4 ; 5\rangle \end{cases}$$

Finalmente la gráfica será:



PROBLEMA 91

Determinar los valores de a, b, c, d ∧ e de modo que F = G, donde

F: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ / $y = F(x) = ax^2 + 7x + b$;
$x \in \langle c \,;\, d\rangle$

G: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ / $y = G(x) = x(3x + e) + 9$;
$x \in \langle 28 - c \,;\, 90 - 2d\rangle$

Resolución:

Como F = G, se cumple:

I) $F(x) \equiv G(x)$

$\longrightarrow \quad ax^2 + 7x + b \equiv 3x^2 + ex + 9$

De donde obtenemos: $a = 3 \wedge e = 7 \wedge b = 9$

II) $D_F = D_G$

$\longrightarrow \quad c = 28 - c \;\wedge\; d = 90 - 2d$

De donde obtenemos: $c = 14 \wedge d = 30$

$\therefore \quad$ **a = 3, b = 9, c = 14, d = 30 ∧ e = 7**

PROBLEMA 92

La función real de variable real cuya regla de correspondencia viene dada por: $y = F(x) = (x\,|\,x\,| + 1/x)\ \text{sen}x^2$ ¿es par o impar?

Resolución:

Se tiene: $F(x) = \left(x\,|\,x\,| + \dfrac{1}{x}\right) \text{sen } x^2$;

$$D_F = \mathbf{R} - \{0\}$$

De donde:

$$F(-x) = \left[(-x)\,|-x\,| + \frac{1}{(-x)}\right] \text{sen}(-x)^2$$

$$F(-x) = \left(-x\,|\,x\,| - \frac{1}{x}\right) \text{sen } x^2$$

$$F(-x) = -\underbrace{\left(x\,|\,x\,| + \frac{1}{x}\right) \text{sen } x^2}$$

$$F(-x) = -F(x)$$

$\therefore\quad$ **F es una función impar**

PROBLEMA 93

Sean F y G dos funciones cuyas reglas de correspondencias son:

$$F(x) = \sqrt{x-1} \quad ; \quad x \in [1\,;\,\infty\rangle$$

$$G(x) = \begin{cases} 3x - 1 \;;\; x \in [0\,;\,3\rangle \\ 5 \qquad\;\, ;\; x \in \langle 3\,;\,8] \end{cases}$$

Determinar la función F o G

Resolución:

Se tiene: $F(x) = \sqrt{x-1}\ ; x \in [1\,;\,\infty\rangle$

$$G(x) = \begin{cases} 3x - 1 \;;\; x \in [0\,;\,3\rangle & ...G_1 \\ 5 \qquad\;\, ;\; x \in \langle 3\,;\,8] & ...G_2 \end{cases}$$

Hallemos F o G_1:

1) Para el dominio: $x \in D_G \wedge G(x) \in D_F$

$$x \in [0\,;\,3\rangle \wedge (3x - 1) \in [1\,;\,\infty\rangle$$

$$0 \le x < 3 \wedge 1 \le 3x - 1 < \infty$$

$$0 \le x < 3 \wedge \frac{2}{3} \le x < \infty$$

$$\frac{2}{3} \le x < 3 \longrightarrow \text{dominio} = [\ \frac{2}{3}\ ;\ 3\ \rangle$$

2) Para la regla de correspondencia:

$$(F \circ G)(x) = F(G(x))$$

$$(F \circ G)(x) = F(3x-1)$$

$$(F \circ G)(x) = \sqrt{3x-1-1}$$

$$(F \circ G)(x) = \sqrt{3x-2}$$

Hallemos F o G_2:

1) para el dominio:

$$x \in D_G \wedge G(x) \in D_F$$

$$x \in \langle 3\,;8] \wedge 5 \in [1\,;\infty\rangle$$

$$x \in \langle 3\,;8] \longrightarrow \text{dominio} = \langle 3\,;8]$$

2) Para la regla de correspondencia:

$$(F \circ G)(x) = F(G(x))$$

$$(F \circ G)(x) = F(5)$$

$$(F \circ G)(x) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4}$$

$$(F \circ G)(x) = 2$$

Finalmente la función F o G viene dada por:

$$(F \circ G)(x) = \begin{cases} \sqrt{3x-2}\,; & x \in [\,\frac{2}{3}\,;3\,\rangle \\ 2 & ;\ x \in \langle 3\,;8] \end{cases}$$

PROBLEMA 94

Dada la función:

$$F = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y = \sqrt{4-x}\ ;-5 < x \leq 3\}$$

Determinar la inversa de F, si existe.

Resolución:

Veamos si F es inyectiva

Sean: $x_1 \wedge x_2 \in \langle -5\,;3] / F(x_1) = F(x_2)$ ...(I)

Pero $\left.\begin{array}{l} F(x_1) = \sqrt{4-x_1} \\ F(x_2) = \sqrt{4-x_2} \end{array}\right\} \sqrt{4-x_1} = \sqrt{4-x_2}$

$$\left(\sqrt{4-x_1}\right)^2 = \left(\sqrt{4-x_2}\right)^2$$

$$|4-x_1| = |4-x_2| \quad ...(II)$$

como:

$$x \in \langle -5\,;3] \iff -5 < x \leq 3$$

$$-3 \leq -x < 5$$

$$4-3 \leq 4-x < 4+5$$

$$1 \leq 4-x < 9 \quad ...(III)$$

De (III) y (II) tenemos:

$$|4-x_1| = |4-x_2|$$

$$4-x_1 = 4-x_2$$

$$-x_1 = -x_2$$

$$x_1 = x_2 \quad ...(IV)$$

Ahora de (I) y (IV) se conluye que F es inyectiva, por lo tanto existe $F^{-1} = F^*$ (función inversa de la función F).

Hallemos la regla de correspondencia de F*

$$F: \quad y = \sqrt{4-x}$$

$$F^*: \ x = \sqrt{4-y} \quad \Longrightarrow \quad y = 4-x^2$$

Hallemos el dominio de F*, según $D_{F*} = R_F$.

De (III) tenemos: $\quad 1 \leq 4-x < 9$

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{4-x} < \sqrt{9}$$

$$1 \leq y < 3$$

De donde : $y \in [1 ; 3\rangle \implies R_F = [1 ; 3\rangle$

Con lo cual tenemos: $D_{F*} = [1 ; 3\rangle$

$\therefore F^* = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / y = 4 - x^2 \wedge x \in [1 ; 3\rangle\}$

PROBLEMA 95

Determinar la regla de correspondencia de la función lineal F, la cual verifica:

$F^*(F(4)) = F^*(8) \wedge F^*(F(3)) = F^*(6)$

Resolución:

Para una función F y su inversa F* se cumple:

$F^*(F(x)) = x$

Con: $F^*(F(4)) = F^*(8) \implies 4 = F^*(8)$

De donde podemos notar que:

$$(4 ; 8) \in F \qquad ...(I)$$

Con: $F^*(F(3) = F^*(6) \implies 3 = F^*(6)$

De donde podemos notar que:

$$(3 ; 6) \in F \qquad ...(II)$$

Como F es lineal: $y = F(x) = ax + b$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{De (I):} & 4a + b = 8 \\ \text{De (II):} & 3a + b = 6 \end{array}\right\} a = 2 \wedge b = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{F : y = F(x) = 2x}$$

PROBLEMA 96

Sean las funciones:

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = x^3 + 2$

$G: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = G(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$

Calcular α para que: $G^*(F^*(\alpha)) = -\dfrac{4}{3}$

Resolución:

Por condición:

$$(G^* \circ F^*)(\alpha) = -\frac{4}{3} \implies (FoG)^*(\alpha) = -\frac{4}{3}$$

De donde podemos notar que:

$$\left(-\frac{4}{3} ; \alpha\right) \in F \circ G \qquad ...(I)$$

Ahora hallemos la regla de correspondencia de F o G:

F o G: $y = F(G(x))$

Como:

$F(x) = x^3 + 2 \iff F(G(x)) = G^3(x) + 2$

$$F(G(x)) = \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^3 + 2 \qquad ...(II)$$

De (I) y (II) tenemos:

$$\alpha = \left(\frac{-\frac{4}{3} - 2}{-\frac{4}{3} + 3}\right)^3 + 2 = \left(\frac{-10}{5}\right)^3 + 2$$

$$\alpha = -8 + 2$$

$$\therefore \quad \boxed{\alpha = -6}$$

PROBLEMA 97

Dada la función $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que

$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2 & ;\ x\in\langle-\infty;0]\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{x}} & ;\ x\in\langle 0;\infty\rangle\end{cases}$$

Encontrar F*, si existe.

Resolución:

$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2\ ;x\in\langle-\infty;0] & ...F_1\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ ;x\in\langle 0;\infty\rangle & ...F_2\end{cases}$$

Si F_1 y F_2 son inyectivas, F es inyectiva y luego existe F*.

Para F_1:

$$x_1\wedge x_2\in\langle-\infty;0]\ /F(x_1)=F(x_2)\quad ...(I)$$

Pero: $$\left.\begin{aligned}F(x_1)&=-\frac{1}{2}x_1^2\\ F(x_2)&=-\frac{1}{2}x_2^2\end{aligned}\right\}-\frac{1}{2}x_1^2=-\frac{1}{2}x_2^2$$

$$x_1^2=x_2^2$$

$$\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}$$

$$|x_1|=|x_2|$$

$$-x_1=-x_2\quad\Longrightarrow\quad x_1=x_2\quad ...(II)$$

De (I) y (II) se concluye que F_1 es inyectiva

Para F_2:

$$x_1\wedge x_2\in\langle 0;\infty\rangle\ /\ F(x_1)=F(x_2)\quad ...(III)$$

Pero: $$\left.\begin{aligned}F(x_1)&=\frac{1}{\sqrt{x_1}}\\ F(x_2)&=\frac{1}{\sqrt{x_2}}\end{aligned}\right\}\ \frac{1}{\sqrt{x_1}}=\frac{1}{\sqrt{x_2}}$$

$$\Longrightarrow\quad \sqrt{x_2}=\sqrt{x_1}$$

$$\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{x_2}\right)^2$$

$$|x_1|=|x_2|$$

$$\Longrightarrow\quad x_1=x_2\quad ...(IV)$$

De (III) y (IV) se concluye que F_2 es inyectiva

Ahora hallemos la regla de correspondencia de F*

$$F_1:\quad y=-\frac{1}{2}x^2\quad\Longleftrightarrow\quad -2y=x^2$$

$$\sqrt{-2y}=\sqrt{x^2}$$

$$\sqrt{-2y}=|x|$$

$$\sqrt{-2y}=-x$$

$$x=-\sqrt{-2y}$$

De donde $F_1^*: y=-\sqrt{-2x}\ \ ;x\in\langle-\infty;0]$

$$F_2:\ y=\frac{1}{\sqrt{x}}\quad\Longleftrightarrow\quad\sqrt{x}=\frac{1}{y}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\frac{1}{y^2}$$

$$|x|=\frac{1}{y^2}\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{1}{y^2}$$



De donde F_2^*: $y=\dfrac{1}{x^2}$; $x\in\langle 0;\infty\rangle$

$$F^*(x)=\begin{cases}-\sqrt{-2x} & ; \ x\in\langle-\infty;0] \\ \dfrac{1}{x^2} & ; \ x\in\langle 0;\infty\rangle\end{cases}$$

PROBLEMA 98

Esbozar la gráfica de la función real de variable real F, cuya regla de correspondencia viene dada por:

$$y=F(x)=x\operatorname{sgn}\left(\frac{x-1}{|x|-2}\right)$$

Resolución:

Por definición de función signo tenemos:

$$\operatorname{Sgn}\left(\frac{x-1}{|x|-2}\right)=\begin{cases}1 \ ; \ \dfrac{x-1}{|x|-2}>0 & ...(I) \\ 0 \ ; \ \dfrac{x-1}{|x|-2}=0 & ...(II) \\ -1 \ ; \ \dfrac{x-1}{|x|-2}<0 & ...(III)\end{cases}$$

Ahora procedemos a determinar la extensión de x, veamos:

de (I):

$\{x-1>0\wedge|x|-2>0\}\cup\{x-1<0\wedge|x|-2<0\}$

$\{x>1\wedge(x>2\vee x<-2)\}\cup\{x<1\wedge-2<x<2\}$

$\{x>2\}\cup\{-2<x<1\}$

$\Longleftrightarrow \quad x\in\langle-2;1\rangle\cup\langle 2;\infty\rangle$

De (II): $\dfrac{x-1}{|x|-2}=0 \implies \quad x=1$

De (III):

$\{x-1>0\wedge|x|-2<0\}\cup\{x-1<0\wedge|x|-2>0\}$

$\{x>1\wedge(-2<x<2)\}\cup\{x<1\wedge(x>2\vee x<-2\}$

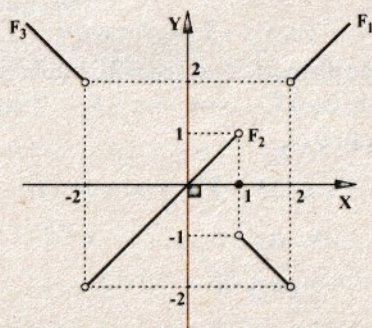
$\{1<x<2\}\cup\{x<-2\}$

$\Longleftrightarrow \quad x\in\langle-\infty;2\rangle\cup\langle 1;2\rangle$

Con lo cual F(x) viene dada por:

$$F(x)=\begin{cases}x \ ; \ x\in\langle-2;1\rangle\cup\langle 2;\infty\rangle & ...F_1 \\ 0 \ ; \ x=1 & ...F_2 \\ -x \ ; \ x\in\langle-\infty;-2\rangle\cup\langle 1;2\rangle & ...F_3\end{cases}$$

cuya gráfica será:



PROBLEMA 99

Dadas las funciones:

$$F(x)=\begin{cases}|x| & ; \ x\in[-5;-1] \\ 2 & ; \ x\in[1;2]\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}[x-1] & ; \ x\in[0;2\rangle \\ x^2 & ; \ x\in[2;3]\end{cases}$$

Determinar la función G o F, si existe.

Resolución:

Redefiniendo la función tenemos:

$$F(x)=\begin{cases} -x\ ;-5\le x\le -1 & ...F_1 \\ 2\ ;1\le x\le 2 & ...F_2 \end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases} -1\ ;0\le x<1 & ...G_1 \\ 0\ ;1\le x<2 & ...G_2 \\ x^2\ ;2\le x\le 3 & ...G_3 \end{cases}$$

Se sabe que

$$G\ o\ F=\{(x;G(F(x)))/x\in D_F\wedge F(x)\in D_G\}$$

Con F_1 y G_1:

$$x\in[-5\ ;-1]\ \wedge(-x)\in[0\ ;1\rangle$$

$$-5\le x\le -1\wedge 0\le -x<1$$

$$-5\le x\le -1\wedge -1<x\le 0$$

Como no existe intersección, entonces no existe G_1 o F_1

Con F_1 y G_2:

$$x\in[-5\ ;-1]\wedge(-x)\in[1\ ;2\rangle$$

$$-5\le x\le -1\ \wedge\ 1\le -x<2$$

$$-5\le x\le -1\ \wedge\ -2<x\le -1$$

$$-2<x\le -1\implies x\in\langle -2\ ;-1]$$

Como existe intersección, entonces existe G_2oF_1 cuya regla de correspondencia se obtiene asi:

$$G(x)=0\wedge F(x)=-x\implies G(F(x))=0$$

Con F_1 y G_3:

$$x\in[-5\ ;-1]\ \wedge\ (-x)\in[2\ ;3]$$

$$-5\le x\le -1\ \wedge\ 2\le -x\le 3$$

$$-5\le x\le -1\ \wedge\ -3\le x\le -2$$

$$-3\le x\le -2\implies x\in[-3\ ;-2]$$

Como existe intersección, entonces existe G_3 o F_1 cuya regla de correspondencia se obtiene así:

$$G(x)=x^2\wedge F(x)=-x\implies G(F(x))=x^2$$

Con F_2 y G_1:

$$x\in[1\ ;2]\ \wedge\ \underbrace{2\in[0\ ;1\rangle}_{\text{absurdo}}=\phi$$

Como no existe intersección, entonces no existe G_1 o F_2

Con F_2 y G_2:

$$x\in[1\ ;2]\ \wedge\ \underbrace{2\in[1\ ;2\rangle}_{\text{absurdo}}=\phi$$

Como no existe intersección, entonces no existe G_2 o F_2

Con F_2 y G_3:

$$x\in[1;2]\wedge 2\in[2\ ;3]\implies x=2$$

como existe intersección, entonces existe G_3oF_2 cuya regla de correspondencia se obtiene asi:

$$G(x)=x^2\wedge F(x)=2\implies G(F(x))=4$$

Finalmente G o F viene dada por:

$$G(F(x))=\begin{cases} 0\ ;\ x\in\langle -2\ ;-1] \\ x^2\ ;\ x\in[-3\ ;-2] \\ 4\ ;\ x=2 \end{cases}$$

PROBLEMA 100

Dada la siguiente función real de variable real F, tal que

$$F(x)=\begin{cases} 2-\sqrt{-\frac{4}{3}(x+1)} & ; x\in[-4;-1\rangle \\ 3+\text{Sgn}(x+1) & ; x\in[-1;3\rangle \\ |x-6|+1 & ; x\in[3;9\rangle \\ -2 & ; x\in[9;12\rangle \end{cases}$$

Determinar su dominio, rango y esbozar su gráfica.

Resolución:

Redefiniendo la función:

Para $x \in [-1;3\rangle$

$$\text{Sgn}(x+1)=\begin{cases} 1; x+1>0 \Rightarrow x>-1 \\ 0; x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ -1; x+1<0 \Rightarrow x<-1 \end{cases}$$

$$3+\text{Sgn}(x+1)=\begin{cases} 4; x\in\langle -1;3\rangle \\ 3; x=-1 \end{cases}$$

Para $x \in [3;9\rangle$:

$$|x-6|=\begin{cases} x-6; x-6\geq 0 \Rightarrow x\geq 6 \\ -x+6; x-6<0 \Rightarrow x<6 \end{cases}$$

$$|x-6|+1=\begin{cases} x-5 & ; x\in[6;9\rangle \\ -x+7 & ; x\in[3;6\rangle \end{cases}$$

Ahora F(x) se podra representar así:

$$F(x)=\begin{cases} 2-\sqrt{-\frac{4}{3}(x+1)} & ; x\in[-4;-1\rangle \ ...F_1 \\ 3 & ; x=-1 \ ...F_2 \\ 4 & ; x\in\langle -1;3\rangle \ ...F_3 \\ -x+7 & ; x\in[3;6\rangle \ ...F_4 \\ x-5 & ; x\in[6;9\rangle \ ...F_5 \\ -2 & ; x\in[9;12\rangle \ ...F_6 \end{cases}$$

Dominio de F

$D_F = D_{F_1} \cup D_{F_2} \cup D_{F_3} \cup D_{F_4} \cup D_{F_5} \cup D_{F_6}$

$D_F = [-4;-1\rangle \cup \{-1\} \cup \langle -1;3\rangle \cup [3;6\rangle \cup [6;9\rangle \cup [9;12\rangle$

$D_F = [-4;12\rangle$

Rango de F

$R_F = R_{F_1} \cup R_{F_2} \cup R_{F_3} \cup R_{F_4} \cup R_{F_5} \cup R_{F_6}$

Para F_1: $-4 \leq x < -1 \Rightarrow -3 \leq x+1 < 0$

$$0 < -\frac{4}{3}(x+1) \leq 4$$

$$0 < \sqrt{-\frac{4}{3}(x+1)} \leq 2$$

$$-2 \leq -\sqrt{-\frac{4}{3}(x+1)} < 0$$

$$0 \leq 2-\sqrt{-\frac{4}{3}(x+1)} < 2$$

De donde tenemos: $R_{F_1} = [0;2\rangle$

Para F_2: de la regla de correspondencia $R_{F_2} = \{3\}$

Para F_3: de la regla de correspondencia $R_{F_3} = \{4\}$

Para F_4: $3 \leq x < 6 \implies -6 < -x \leq -3 \implies 1 < -x + 7 \leq 4$

De donde tenemos: $R_{F_4} = \langle 1 ; 4]$

Para F_5: $6 \leq x < 9 \implies 1 \leq x - 5 < 4$

De donde tenemos: $R_{F_5} = [1 ; 4\rangle$

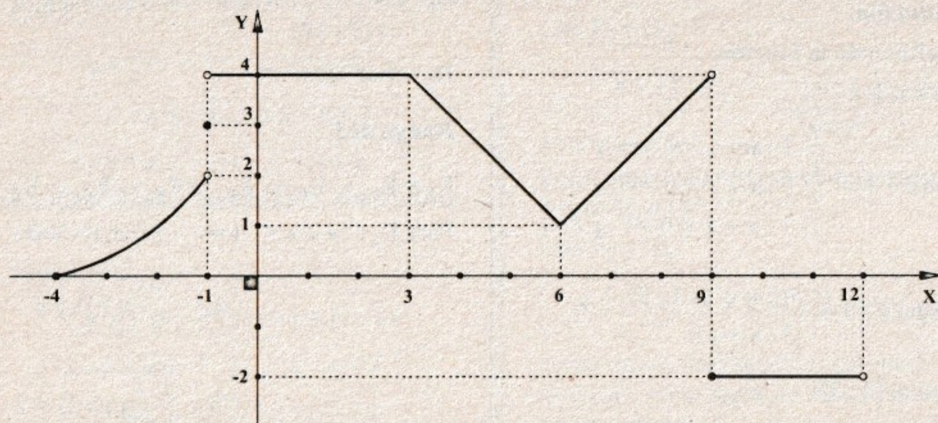
Para F_6: de la regla de correspondencia $R_{F_6} = \{-2\}$

Ahora el rango de F será:

$$R_F = [0 ; 2\rangle \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \langle 1 ; 4] \cup [1 ; 4\rangle \cup \{-2\}$$

$$R_F = [0 ; 4] \cup \{-2\}$$

Graficando:



Problemas Propuestos



PROBLEMA 1

Marcar (V) o (F)

I) Toda función es una relación

II) Toda relación es una función

III) Toda recta es una función

IV) Toda parábola es una función

A) FVFF B) VFFF C) VFVV

D) VFVF E) VFFV

PROBLEMA 2

Calcular "a + b" si el conjunto:

$F = \{(8;2), (2;a), (a^2-1;b), (2;2a-3), (3;5)\}$

es una función.

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 4

PROBLEMA 3

Determinar el dominio de la función real de variable real F cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

A) $[-1;1]$ B) $\langle -1;1\rangle$ C) $\langle -\infty;1\rangle$

D) $\langle 1;\infty\rangle$ E) $\mathbf{R}^+$

PROBLEMA 4

Si:

$$F(x) = \begin{cases} 3x-1 & ; \quad x>3 \\ x^2-1 & ; \quad -2\le x\le 3 \\ 2x+3 & ; \quad x<-2 \end{cases}$$

Calcular :

$$F(2)+F(4)-F(-3)+F(-1)$$

A) 10 B) 12 C) 14

D) 15 E) 17

PROBLEMA 5

Si $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \, / \, y = F(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Determinar el menor valor de $F(x)$

A) 1/2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{3}/2$ E) 1

PROBLEMA 6

Encontrar el rango de la siguiente aplicación:

$$F: \langle -4 ; 2\rangle \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{1+|x-3|}{|x+1|-3}$$

A) $\langle -\infty ; 5/3\rangle \cup \langle 2 ; 4\rangle$ B) $\langle -\infty ; -\frac{5}{3}]$

C) $\langle -\infty ; -2\rangle$ D) $\mathbf{R}$ E) ϕ

PROBLEMA 7

¿Cuántas de las siguientes proposiciones

I) $\forall x \in \mathbf{R}$; $0 \le x - [\![x]\!] < 1$

II) $F = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / |y| = |x| - 1\}$ es una función.

III) $F(x) = \sqrt{9-|x|}$; $x \in [0 ; 9\rangle$ es inyectiva

IV) $F(x) = x\sqrt{x^2-4}$ es impar.

son verdaderas?.

A) Ninguna B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

PROBLEMA 8

Determinar el rango de la función F.

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = x + \frac{1}{x}$$

A) $[0 ; \infty\rangle$ B) $[1 ; \infty\rangle$ C) $[2 ; \infty\rangle$

D) $[-2 ; 2\rangle$ E) NA

PROBLEMA 9

Para la función:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{x-3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} ;$$

$x \in \langle 1 ; 2\rangle$

Se dan las proposiciones:

I) Es inyectiva II) Es creciente

III) Tiene inversa

Luego son verdaderas.

A) I y II B) II y III C) Sólo II

D) I y III E) NA

PROBLEMA 10

Determinar el rango de la función

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{x}$$

A) $\langle -\infty ; 0\rangle$ B) $\langle 0 ; \infty\rangle$ C) $\mathbf{R}$

D) $\{-2 ; 2\}$ E) $\langle -2; 2\rangle$

PROBLEMA 11

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y F una función definida en A tal que:

$F = \{(1 ; 3), (2 ; a), (a+1; 2), (1 ; b-1)\}$

Calcular: $F(1) - F(2) + F(3)$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 6 E) 3/2



PROBLEMA 12

Determinar el dominio de la función real de variable real F cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{5}$$

A) $\mathbf{R} - \{0\}$ B) $\mathbf{R} - \{-1;-2\}$ C) $\mathbf{R}$

D) $\mathbf{R} - \{3;5\}$ E) $\mathbf{R} - \{1;2\}$

PROBLEMA 13

Si $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = \sqrt{x^2 - x + 2007}$

¿Cuál es el dominio de F?

A) $\mathbf{R}$ B) $[-2007;1]$ C) $[-1;2007]$

D) $[-2007;-1]$ E) $\langle -1;2007 \rangle$

PROBLEMA 14

Determinar el dominio de la función:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = \frac{x^2+1}{x^2 - x - 2}$$

A) $\mathbf{R}$ B) $\mathbf{R} - \{-1\}$ C) $\mathbf{R} - \{2\}$

D) $\langle -1;2 \rangle$ E) $\mathbf{R} - \{-1;2\}$

PROBLEMA 15

Determinar el dominio de la función

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / \ y = F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

A) $\langle -\infty;1 \rangle$ B) $\langle -\infty;1] \cup [1;\infty \rangle$

C) $[1;\infty \rangle$ D) $\langle -\infty;2 \rangle$ E) $\mathbf{R}$

PROBLEMA 16

Determinar el dominio de la función

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{1 - 2x}}$$

A) $[-1;1/2\rangle \cup [2;\infty\rangle$

B) $\langle -\infty;-1] \cup [1/2;2]$

C) $\langle -\infty;-1] \cup \langle 1;2]$

D) $\langle -\infty;-1] \cup \langle 1/2;2]$

E) $[-1;2]$

PROBLEMA 17

Determinar el rango de la función

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = x^2 - 6x + 10$

A) $[1;\infty\rangle$ B) $\langle 1;\infty\rangle$ C) $[9;\infty\rangle$

D) $\langle -\infty;1]$ E) $\langle -\infty;3]$

PROBLEMA 18

Determinar el rango de la función.

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = \sqrt{4 - x^2}$

A) $\langle 0;2\rangle$ B) $\langle -2;0]$ C) $[0;\infty\rangle$

D) $[0;2]$ E) $[0;4\rangle$

PROBLEMA 19

Determinar el rango de la función.

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = \sqrt{x-4} + 7$;

A) **R** B) $[4 ; \infty\rangle$ C) $\langle 4 ; \infty\rangle$

D) $[7 ; \infty\rangle$ E) $\langle -7 ; \infty\rangle$

PROBLEMA 20

Dada la función F, tal que:

$$F(x) = \begin{cases} x+1 & ; x < 2 \\ x-1 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

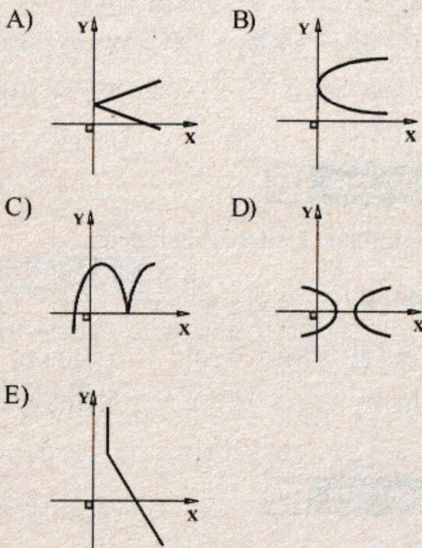
Calcular: $F(F(-2)) + F(F(4))$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

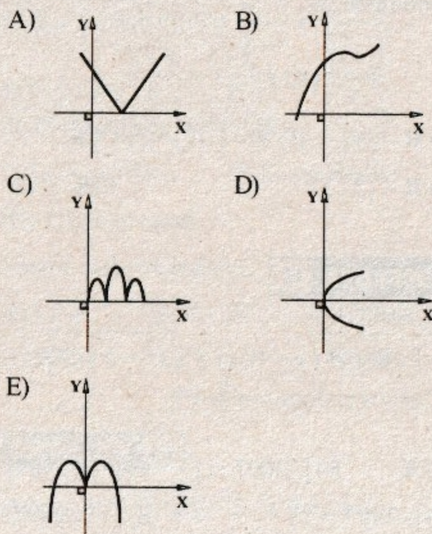
PROBLEMA 21

¿Cuál de las siguientes gráficas representa a una función?



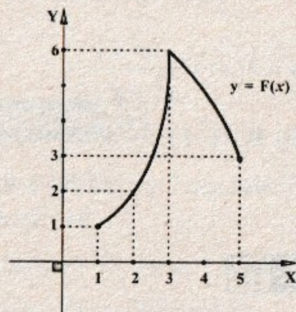
PROBLEMA 22

Cuál de los siguientes gráficos no es el de una función



PROBLEMA 23

Sea la gráfica de la función:



Calcular: $S = \dfrac{F(5) + F(1)}{F(2) + F(3)}$

A) 2 B) 1/2 C) 3

D) 1/3 E) 4



PROBLEMA 24

Sea F la función definida por $F(x) = -2x + 3$ indicar su gráfica.

A) B) C) D) E)

PROBLEMA 25

Graficar: $F(x) = x^2 - 1$

A) B) C) D) E)

PROBLEMA 26

Esbozar la gráfica de la función:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = 4x^2 + 7$

A) B) C) D) E)

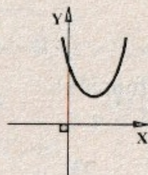
PROBLEMA 27

Esbozar la gráfica de la función

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = 2(x-1)^2$

A) B) C) D)

E)

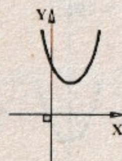


PROBLEMA 28

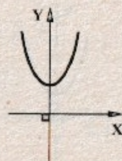
Esbozar la gráfica de la función

F: **R** → **R** / y = F(x) = $2(x-1)^2+3$

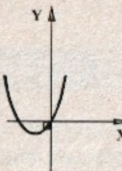
A)



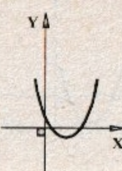
B)



C)



D)



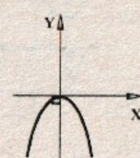
E) N.A.

PROBLEMA 29

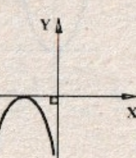
Esbozar la gráfica de la función

F: **R** → **R** / y = F(x) = $-2(x+3)^2$

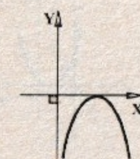
A)



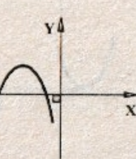
B)



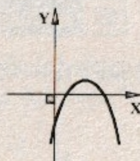
C)



D)



E)

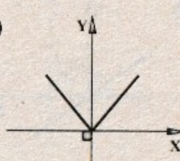


PROBLEMA 30

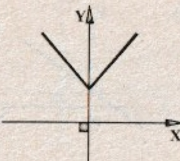
Esbozar la gráfica de la función

F: **R** → **R** / y = F(x) = $|x-2|$

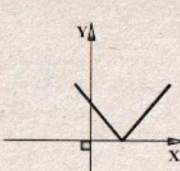
A)



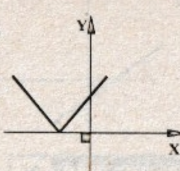
B)



C)



D)

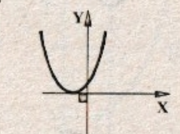


E) N.A.

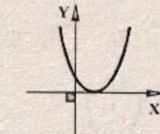
PROBLEMA 31

Si b < 0; la gráfica de y = F(x) = $(x+b)^2$ es:

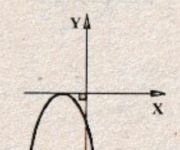
A)



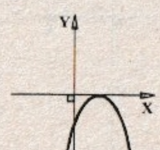
B)



C)



D)

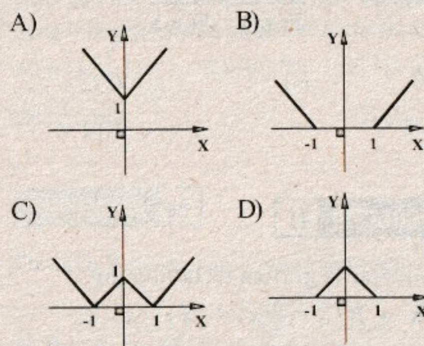


E) N.A.



PROBLEMA 32

Indicar la gráfica de $y = F(x) = ||x| - 1|$

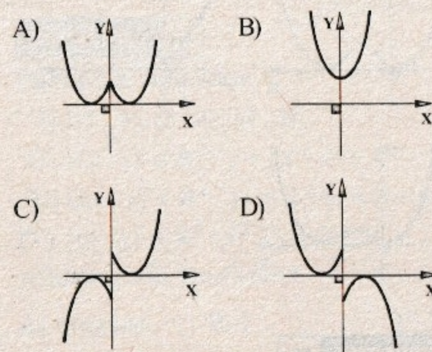


E) N.A.

PROBLEMA 33

Esbozar la gráfica de la función

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = (|x| - 1)^2$



E) N.A.

PROBLEMA 34

Determinar el área de la región triangular que resulta al intersectar las gráficas de las funciones.

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = 4$

G: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = G(x) = |x - 1| + 3$

A) $1\mu^2$ B) $3\mu^2$ C) $4\mu^2$

D) $5\mu^2$ E) $6\mu^2$

PROBLEMA 35

Calcular el área del triángulo formado por la gráfica de la función.

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = 5 - |x + 2|$

y el eje de abcisas.

A) $10\mu^2$ B) $15\mu^2$ C) $25\mu^2$

D) $35\mu^2$ E) $50\mu^2$

PROBLEMA 36

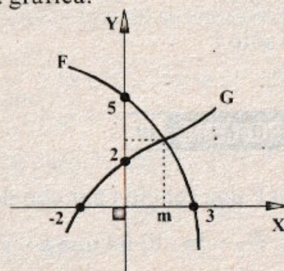
Calcular el área del triángulo formado por la gráfica de la función valor absoluto y la función constante $y = F(x) = 3$.

A) $3\mu^2$ B) $12\mu^2$ C) $6\mu^2$

D) $15\mu^2$ E) $9\mu^2$

PROBLEMA 37

A partir de la gráfica:



Calcular: $F(G(-2)) - G(F(3)) + \dfrac{F(m)}{G(m)}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 38

Determinar el punto de intersección de las funciones:

$F = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 /\ y = \sqrt{x+1}\ , x \in [2\,;8]\}$

$G = \{(2\,;3), (4\,;4), (5\,;7), (6\,;8), (8\,;3)\}$

A) (2 ; 3) B) (4 ; 4) C) (5 ; 7)
D) (6 ; 8) E) (8 ; 3)

PROBLEMA 39

Dadas las funciones.

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = \sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-4}$

$G: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = G(x) = \sqrt{(x-2)(x-4)}$

Se podrá afirmar que:

I) $F = G$

II) $D_G - F_G = \langle -\infty\,; 2]$

III) $R_G - R_F = \phi$

A) I y II B) sólo II C) sólo III
D) sólo I E) II y III

PROBLEMA 40

Sea F una función par con dominio:

$x \in D_F = [a\,;b]$ tal que $a < x_1 < x_2 < b$

Además: $|x_1| = x_2$

Calcular: $\dfrac{F(x_1)}{F(x_2)} + \dfrac{F(x_2)}{F(x_1)}$

A) 0 B) –1 C) 2
D) –2 E) 1

PROBLEMA 41

Bosquejar la gráfica de la función:

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = |x|\,.\,|x-1|$

A) B)

C) D)

E)

PROBLEMA 42

Sea F una función lineal tal que:

$\{(a\,;a), (-a\,;-3a), (a+2\,;-a-2)\} \subset F$, luego el valor de F(2) es:

A) 7 B) 5 C) 3
D) –2 E) $A \vee D$



PROBLEMA 43

Uno de los siguientes puntos no pertenece a la gráfica de la función creciente F.

A) (–3 ; –2) B) (0 ; 0) C) (– 1 ; 3)

D) (2 ; 1) E) (6 ; 2)

PROBLEMA 44

Dada la función real de variable real.

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}}$$

Determinar: $D_F - R_F$

A) $\langle -\infty ; 2\rangle \cup \langle 0 ; 3\rangle$ B) $\langle 1 ; \infty\rangle$

C) $\langle -\infty ; 2\rangle \cup \langle -2 ; 0\rangle$ D) $\langle -\infty ; -2\rangle$

E) ϕ

PROBLEMA 45

Dados los conjuntos

I) $\{(1 ; 4), (3 ; 4), (4 ; 3)\}$

II) $\{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y = |x-2|\}$

III) $\{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y^2 = x+1,\ x \geq -1\}$

IV) $\{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, x^2 + y + 1 = 0\}$

¿Cuántas son funciones?

A) ninguno B) 1 C) 2

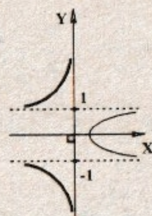
D) 3 E) 4

PROBLEMA 46

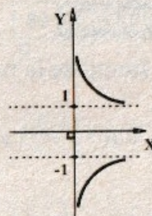
Esbozar la gráfica de la siguiente relación:

$$R = \left\{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, x = \frac{1}{y^2-1}\right\}$$

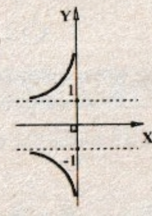
A)



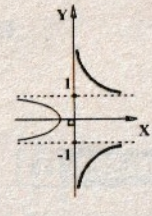
B)



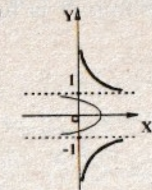
C)



D)



E)



PROBLEMA 47

Calcular "a + b" en la función:

$F = \{(a ; a^b), (a ; a^{a-b}), (2b ; b^a)\}$

A) 1 B) 4 C) 6

D) 81 E) 36

PROBLEMA 48

Determinar el rango de la función real de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$F(x) = \begin{cases} 2x - 1 \;; & x \in \langle 1 ; 2] \\ x^2 + 1 \;; & x \in \langle 2 ; 7\rangle \end{cases}$$

A) $\langle 1 ; 3] \cup \langle 5 ; 50\rangle$ B) $\langle 1 ; 3]$

C) $[3 ; 5\rangle$ D) $\langle 5 ; 50\rangle$

E) $[1 ; 3] \cup \langle 5 ; 50\rangle$

PROBLEMA 49

Si el rango de la función:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{8}{x^2+9}$$

es $\langle a+1\ ;\ b+1]$, calcular: a/b

A) 1/5 B) 3 C) 2

D) 1/3 E) 9

PROBLEMA 50

Calcular "a + b" si el dominio de la función:

F: **R** → **R** / y, donde:

$$y = F(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{3x^2-7-8x^2}} + \sqrt{4x^2-1}$$

es $[-a\ ;\ -b] \cup [b\ ;\ a]$

A) 1/2 B) 1 C) 3/2

D) 2/3 E) 1/6

PROBLEMA 51

Dadas las funciones F y G cuyas reglas de correspondencias son:

$$F(x) = \begin{cases} x^2+7 & ;\ x<1 \\ 3-2x & ;\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 5x+1 & ;\ x \leq 0 \\ x^3-2 & ;\ x>0 \end{cases}$$

Calcular: G(F(2)) + F(G(1))

A) 0 B) 3 C) 4

D) 6 E) 2

PROBLEMA 52

Dada la función

$F = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 / y = F(x) = 4+2x-x^2 ; x \in [-2;4]\}$

Determinar su rango.

A) [–4 ; 5] B) [–5 ; 5] C) [–2 ; 2]

D) [–2 ; 3] E) **R**

PROBLEMA 53

Sea la función: $F(x) = x^2 - |x| + 9$ con dominio en $x \in \mathbf{R} - [-5\ ;\ 5]$

Determine el menor valor entero que asume F.

A) –12 B) 13 C) 30

D) 15 E) 18

PROBLEMA 54

Determinar el rango de la siguiente función.

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$$

A) $\left[-\frac{1}{3}\ ;\ 0\right]$ B) $\left[\frac{1}{3}\ ;\ 3\right]$ C) [1 ; 6]

D) $\left[-\frac{1}{3}\ ;\ 4\right]$ E) [–3 ; 1]

PROBLEMA 55

Determinar el rango de la función.

$F = \{(x\ ;\ 2x-2|x|) \in \mathbf{R}^2 / x \in \mathbf{R}\}$



A) $\langle 0 ; \infty\rangle$ B) $[0 ; \infty\rangle$ C) $\langle -\infty; 0]$

D) $\langle -\infty ; 0\rangle$ E) **R**

PROBLEMA 56

Dadas las funciones

H: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = H(x) = x^2 - 4x + 7$

G: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = G(x) = -x^2 - 10x - 27$

Si: $H(x_0) \le H(x)$; $\forall x \in D_H$

$G(x_1) \ge G(x)$; $\forall x \in D_G$

Calcular: $x_0 - x_1$

A) –3 B) 3 C) 7

D) –7 E) 5

PROBLEMA 57

Sea F una función real de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \sqrt{6 - \sqrt{x^4 - 10x^3 + 25x^2}}$$

Calcular: a + b + c + d, sabiendo que su dominio es: [a ; b] ∪ [c ; d]

A) 10 B) 6 C) 8

D) 2 E) 16

PROBLEMA 58

Determinar el dominio de la función:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / \ y = F(x) = \sqrt{\frac{4}{(x+1)^2} + \frac{x-3}{x+1} - 49}$$

A) $\left[-\frac{4}{3} ; -\frac{3}{4}\right] - \{-1\}$ B) $\left[-\frac{4}{3} ; \frac{1}{2}\right] - \{1\}$

C) ϕ D) **R**

E) $\left[-\frac{4}{3} ; \frac{4}{3}\right] - \{1\}$

PROBLEMA 59

Determinar el dominio de la función:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / \ y = F(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{21} - \sqrt{x^2 - 4}}}$$

A) $\langle -5 ; -2\rangle \cup [4 ; 5\rangle$ B) $\langle -6 ; -2\rangle \cup [3 ; 8\rangle$

C) $\langle -3 ; -2\rangle \cup [1 ; 5\rangle$ D) **R**

E) $\langle -5 ; -2] \cup [4 ; 5\rangle$

PROBLEMA 60

Determinar el rango de la función:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / \ y = F(x) = \sqrt{1 - x^2} - x^2$$

A) {1} B) [–8 ; –1] C) [–1 ; 0]

D) [–1 ; 1] E) {0}

PROBLEMA 61

Dada la información:

I) $F\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{18}{x^2} - \frac{36}{x} + c$ II) $F(4) = 7$

Determinar el rango de F.

A) $[3 ; \infty\rangle$ B) $[2 ; \infty\rangle$ C) $[5 ; \infty\rangle$

D) $\langle -\infty ; 7\rangle$ E) $[\frac{5}{2} ; \infty\rangle$

PROBLEMA 62

Determinar el rango de la función:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = 4+\sqrt{x^2+9}$

donde x verifica: $|||x|-2|-1|<1$

A) $\langle 7 ; 9\rangle$ B) $\langle 7 ; 9\rangle - \{\sqrt{13}+4\}$

C) $\langle 7 ; 9] - \{\sqrt{13}+4\}$ D) $\langle 7 ; 10\rangle$

E) $[7 ; 9\rangle - \{\sqrt{13}+4\}$

PROBLEMA 63

Siendo F una función lineal decreciente tal que:

$F(F(1)) = 1 \wedge F(F(-2)) = F(-5)$

Calcular: $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$; $h \neq 0$

A) -1 B) $2h$ C) $-h/2$

D) -3 E) -7

PROBLEMA 64

Determinar el rango de la función:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ /$y = F(x) = |2x-1|-x$

A) $\langle -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\rangle$ B) $[-\frac{1}{2} ; \infty\rangle$ C) $\langle -\infty ; 1]$

D) $\langle -\infty ; -\frac{1}{2}\rangle$ E) $[\frac{1}{3} ; \infty\rangle$

PROBLEMA 65

Expresar mediante una sola regla de correspondencia la función:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ ; \ x \geq 0 \\ x \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

A) $F(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$ B) $F(x) = x+|x|$

C) $F(x) = x-|x|$ D) $F(x) = \dfrac{x-|x|}{2}$

E) $F(x) = \dfrac{|x|-x}{2}$

PROBLEMA 66

Determinar el rango de la relación:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = \sqrt{x-2y}$

A) $[0 ; \infty\rangle$ B) $[0 ; 1\rangle$ C) $[-2 ; 0]$

D) $[1 ; \infty\rangle$ E) $\langle -\infty ; -2\rangle \cup [0 ; \infty\rangle$

PROBLEMA 67

Dadas las funciones:

G: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = (x-1)^2-3 ; x \in \langle 4 ; 5\rangle$

H: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = H(x) = x-2 ; x \in \langle 6 ; 10\rangle$

Determinar el dominio de G*oH.

A) $\langle 5 ; 8\rangle$ B) $\langle 5 ; 10\rangle$ C) $\langle 8 ; 10\rangle$

D) $\langle 4 ; 6\rangle$ E) $\langle 4 ; 10\rangle$

PROBLEMA 68

¿Para qué valor de "k" las funciones



F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = x^2$

G: $\mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = G(x) = 3x + k$

Tiene un único punto en común?

A) 1/3 B) –4/9 C) 9/4

D) –9/4 E) –1/9

PROBLEMA 69

Una partícula se coloca en el punto P de la parábola: $y = x^2 - x - 6$ cuya ordenada es 6, se le deja rodar por la parábola hasta que llegue a un punto Q cuya ordenada es –6. La mínima distancia horizontal que ha recorrido la partícula es:

A) 5 B) 4 C) 3

D) 6 E) 2

PROBLEMA 70

Un carpintero puede producir carpetas a un costo unitario de S/50.00, si las vende a "k" soles c/u podrá vender aproximadamente (120 – k) carpetas al mes. La utilidad mensual del carpintero depende del precio de venta de las carpetas. ¿Cuál deberá ser el precio de venta para una utilidad máxima?

A) S/75.00 B) S/80.00 C) S/85.00

D) S/90.00 E) S/94.00

PROBLEMA 71

Calcular G(F(9)), sabiendo que:

$F(G(x)) = x^3 + x + 1 \wedge G(x) = x^3 + 1$

A) 1331 B) 1332 C) 1333

D) 1000 E) 9

PROBLEMA 72

Calcular el área del cuadrado cuyo lado es la mínima longitud que existe entre dos puntos de distinta rama de la hiperbóla equinoxial $y = 1/x$.

A) $25\mu^2$ B) $16\mu^2$ C) $8\mu^2$

D) $4\mu^2$ E) $2\mu^2$

PROBLEMA 73

Determinar el dominio de la función

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 9}}{x|x-3| - x}$$

A) $\langle -\infty ; -3\rangle \cup \langle 3 ; \infty\rangle$ B) $\langle -\infty ; -3]$

C) $\langle -\infty ; -3\rangle \cup [3 ; \infty\rangle - \{4\}$ D) $\mathbf{R} - \{4\}$

E) $\mathbf{R} - \langle -3 ; 3\rangle$

PROBLEMA 74

Determinar el mínimo valor de F, si:

$$F(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x} ; x \in [0 ; \infty\rangle$$

A) $\sqrt{2} - 1$ B) 1 C) $2\sqrt{2} - 2$

D) $\sqrt{2} + 1$ E) $2\sqrt{2} + 1$



PROBLEMA 75

Si F es una función real de variable real que verifica:

$$F(x+1) = F(x) + x \ \wedge \ F(2) = 5$$

Calcular: $\dfrac{F(4)}{F(0)}$

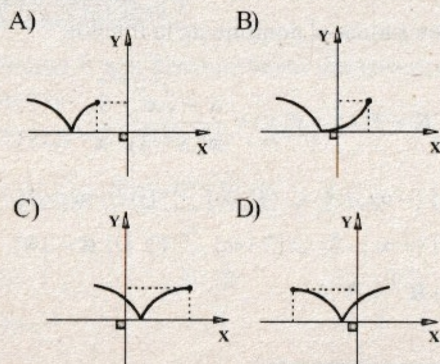
A) 1/2 B) 3/2 C) 5/2

D) 1 E) 7/2

PROBLEMA 76

Esbozar la gráfica de la función

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ / \ y = F(x) = |2 - \sqrt{1-x}\,|$



E) N.A.

PROBLEMA 77

Determinar el dominio de la función

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ / \ y = F(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 16}}{x\,[\![x-4]\!] - x}$$

A) $\langle -\infty ; -4] \cup [4 ; \infty\rangle$

B) $\langle -\infty ; -4] \cup [6 ; \infty\rangle$

C) $\mathbf{R} - \{0 ; 4\}$

D) $\langle -4 ; 6\rangle$

E) $\langle -\infty ; -4] \cup [5 ; \infty\rangle$

PROBLEMA 78

Determinar el rango de la función:

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ / \ y = F(x) = 2 + (-1)^{[\![x]\!]}$

A) $\mathbf{R}$ B) $\langle 1 ; 2]$ C) $\{1 ; 3\}$

D) $[0 ; 2]$ E) $[2 ; \infty\rangle$

PROBLEMA 79

Determinar la suma de los elementos del rango de la siguiente función:

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ / \ y = F(x) = \mathrm{Sgn}(x^2 - 1) + \mathrm{Sgn}(\sqrt{x} + 1)$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

PROBLEMA 80

Dadas las funciones:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ / \ y = F(x) = \frac{x(x-2)}{x-2}$$

$G: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ / \ y = G(x) = x$

Cuál (o cuáles) de las siguientes proposiciones:

I) $F = G$ II) $R_G - R_F = \{-2\}$

III) $D_G - D_F \neq \phi$

Son verdaderas.

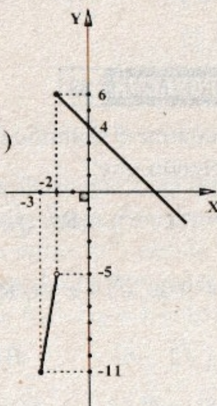


A) sólo I B) $I \wedge II$ C) sólo II

D) sólo III E) Todas

PROBLEMA 81

Dada la gráfica de la función F.



Calcular:

$F(-\sqrt[3]{9}) - 3F(2\sqrt[3]{9})$

A) 3

B) –3

C) 5

D) –5

E) N.A

PROBLEMA 82

Sea y = F(x), que expresa el área de un rectángulo de base "x" y cuya longitud del perímetro es "2P". Determinar el dominio y el rango de F.

A) $\langle 0 ; p\rangle , \langle 0 ; \frac{p^2}{2}]$ B) $\langle 0 ; 2p\rangle , \langle 0 ; \frac{p}{4}]$

C) $\langle 0 ; p\rangle , \langle 0 ; \frac{p^2}{4}]$ D) $\langle 0 ; p\rangle , \langle p ; 2p\rangle$

E) $\langle -p ; p\rangle , \langle 0 ; p^2\rangle$

PROBLEMA 83

Dada la función:

$$F : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{ax+8}{4x+b}$$

Encontrar los valores de a y b de tal manera que se cumple simultáneamente las condiciones:

I) $D_{F^*} = \mathbf{R} - \{1/2\} \;\wedge\;$ II) $F^* = F$

Indicar como respuesta: a + b

A) 1 B) 2 C) –2

D) 4 E) N.A

PROBLEMA 84

Si el área total de un cono circular recto mide $4\pi\ \mu^2$. Hallar su altura como función del radio, indicar su dominio.

A) $[0 ; 2\rangle$ B) $\langle 0 ; \sqrt{2}\,]$

C) $\langle -\sqrt{2} ; \sqrt{2}\rangle$ D) $[0 ; \sqrt{2}\rangle$

E) $[0 ; \sqrt{2}\,]$

PROBLEMA 85

Dada la función.

$$F : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Se afirma que:

A) Es equivalente en todo su dominio.

B) Su rango es **R**.

C) Existe su inversa en $\langle -1 ; 1\rangle$

D) Es creciente en $\langle -\infty ; -1\rangle$

E) N.A.

PROBLEMA 86

Determinar el dominio y el rango de la siguiente función:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} /\ y = F(x) = \frac{x^3+7x^2+14x+8}{x^2+6x+8}$$

A) $\mathbf{R} \wedge \mathbf{R}^+$ B) $\mathbf{R}-\{-2;-4\} \wedge \mathbf{R}-\{-1;-3\}$

C) $\mathbf{R}^- \wedge \mathbf{R}^+$ D) $[-2;4] \wedge [-3;-1]$

E) $\mathbf{Z}^- \wedge \mathbf{Z}^+$

PROBLEMA 87

Dada la función:

$$F(x) = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{x+4}{2}\right]\!\right] & ; \ x \in [0;2\rangle \\ 5-\sqrt{2|x-4|} & ; \ x \in [2;6] \\ 1 & ; \ x \in [7;9] \\ x-8 & ; \ x \in \langle 9;12\rangle \end{cases}$$

Se puede afirmar que:

A) Es creciente en $[1;4]$

B) Es no creciente en $[4;8]$

C) Es decreciente en $[3;5]$

D) Es no decreciente en $[6;12\rangle$

E) Es no constante en $\left[\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right]$

PROBLEMA 88

Determinar si las funciones $F \wedge G$ son pares (P) o impares (I).

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} /\ y = F(x) = |x-2| - |x+2|$

$G: \mathbf{R} \to \mathbf{R} /\ y = G(x) = \sqrt{x + [\![-x]\!]} + x[\![x]\!]$

A) PP B) IP C) I I

D) P I E) N.A.

PROBLEMA 89

Encontrar el dominio de la función FoG* sabiendo que:

$F = \{(x;x^2) \in \mathbf{R}^2 / \sqrt{x(x-1)} \geq 0\}$

$G = \{(x;\sqrt{3-x}) \in \mathbf{R}^2 / -1 < x \leq 3\}$

A) $[\sqrt{2};\infty\rangle$ B) $\langle -\infty;\sqrt{2}]$

C) $[0;\sqrt{2}] \cup \{\sqrt{3}\}$ D) $\langle -4;\sqrt{2}\rangle \cup \langle 7;\infty\rangle$

E) N.A.

PROBLEMA 90

Si:

$$H(x) = \begin{cases} x^2-4 & ; \ x \leq -2 \\ 2-|x| & ; -2 < x < 2 \\ x-2 & ; \ x \geq 2 \end{cases}$$

Indicar lo correcto.

A) Es creciente en $\langle -\infty;-2\rangle$

B) Es creciente en $\langle -2;2\rangle$

C) Es decreciente en $\langle -2;2\rangle$

D) Es decreciente en $\langle 0;\infty\rangle$

E) Es continua en su dominio.



PROBLEMA 91

El rango de F, donde:

$F = \{(x\,;y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y = [\![3(x+x^2)^{-1}]\!]\}$

es $\mathbf{Z} - [a\,;b]$ con $a \wedge b \in \mathbf{Z}$, luego el valor de ab es:

A) 12 B) −12 C) 11

D) −11 E) 0

PROBLEMA 92

Sea F una función en la que $F(x)$ representa el área del rectángulo inscrito en un semicírculo de radio "p", siendo "x" la medida de la base que se encuentra sobre el diámetro. Si $R_F - D_F \neq \phi$ entonces es verdad que:

A) $P \geq 2$ B) $P > 2$ C) $P > \sqrt{2}$

D) $P < 2$ E) $P \leq 2$

PROBLEMA 93

Sea F una función con dominio igual a $[a\,;b\rangle$ y rango igual a $\langle c\,;0]$, $a > 0$ y regla de correspondencia:

$$F(x) = \frac{|x-4|-2}{|x+2|}$$

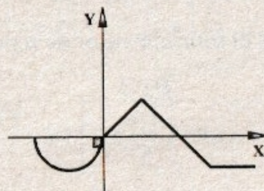
luego el valor de abc^{-1} es:

A) 16 B) −12 C) −16

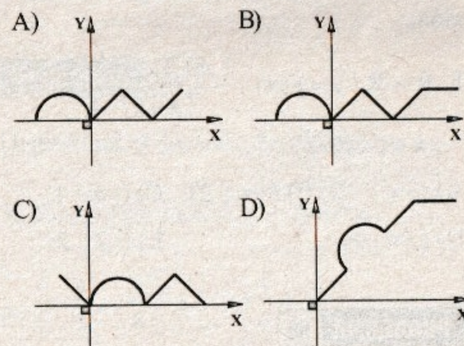
D) −24 E) −36

PROBLEMA 94

A continuación se muestra la gráfica de la función F tal que $y = F(x)$.



Luego la gráfica de la función H, donde $H(x) = |F(x)|$; $x \in D_F$ será:



E) N.A.

PROBLEMA 95

La función F es ni par, ni impar, la función G es par, la función H es impar. Entonces son falsas:

I) $2F - G^2$ puede ser impar.

II) $F + 2H$ puede ser par.

III) H^2G es impar, si existe.

A) Todas B) I C) ninguna

D) $I \wedge II$ E) III

PROBLEMA 96

Consideremos a la función inyectiva.

$F: [a\ ;\ b] \rightarrow \mathbf{R}\ /\ y = F(x) = 3x^2 - 18x + ab$

Entonces el mínimo valor de **a** puede ser:

A) 6 B) 3 C) 4

D) 2 E) 0

PROBLEMA 97

Determinar el rango de la siguiente función:

$$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\ /\ y = F(x) = \frac{|x+3| - |x+5|}{|x+1| - 4}\ ;$$

$x \in \langle -5\ ;\ 2]$

A) $\langle -\infty\ ;\ -2\rangle$ B) $\langle -\infty\ ;\ 2]$ C) $\langle -\infty\ ;\ 1\rangle$

D) $\langle -\infty\ ;\ 0\rangle$ E) $\langle -2\ ;\ 2\rangle$

PROBLEMA 98

Dadas las funciones:

$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\ /\ y = F(x) = 2x^2 - 4x + 1\ ;\ x \in \langle 0\ ;\ 2]$

$$G: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / y = G(x) = \sqrt{4x + \frac{1}{2x^2}}\ ; x \in \langle 0\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$$

Determinar el rango de: $F + G^2$.

A) $[3\ ;\ \infty\rangle$ B) $\langle 1\ ;\ \infty\rangle$ C) $[1\ ;\ \infty\rangle$

D) $\langle 3\ ;\ \infty\rangle$ E) $\{3\}$

PROBLEMA 99

Encontrar el dominio y rango de la siguiente función:

$$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\ /\ y = F(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$$

para luego indicar lo correcto.

A) $D_F \neq R_F$ B) $D_F > R_F$

C) $D_F < R_F$ D) $D_F = R_F$

E) $D_F > 2R_F$

PROBLEMA 100

Esbozar la gráfica de la función:

$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\ /\ y = F(x) = -(3x^2 - |x|)$

A) Y X B) Y X

C) Y X D) Y X

E) Y X

PROBLEMA 101

Determinar el rango de la función:

$$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\ /\ y = F(x) = \frac{x + |x|}{|x| - [\![x]\!]}$$

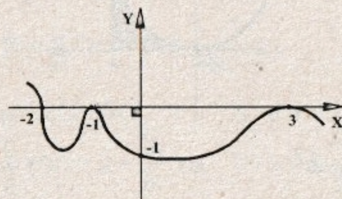
A) $\langle 4\ ;\ \infty\rangle$ B) $\langle 4\ ;\ \infty\rangle \cup \{0\ ;\ 2\}$

C) $\langle -2\ ;\ 2\rangle$ D) $[0\ ;\ 2]$ E) $\langle 0\ ;\ 2\rangle$



PROBLEMA 102

La función polinomial F: $y = F(x)$ de grado mínimo tiene una gráfica aproximada.



Si $(-4\,;\,b) \in F$, encuentre el valor de **b**.

A) 49 B) 16 C) 48

D) 64 E) 14

PROBLEMA 103

Si la función F es periódica de periodo "T", la función G definida por $y = F(ax + b)$, $a \neq 0$ es también periódica con periodo:

A) aT B) aT – b C) T/(a – b)

D) T/a E) a^2T

PROBLEMA 104

Marcar verdadero (V) o falso (F).

I) Si F es impar, entonces F* también es impar.

II) Si F es par, entonces F* también es par.

III) No existen inversas de funciones periódicas

A) VVF B) FFF C) VFF

D) VFV E) FFV

PROBLEMA 105

Determinar el rango de la función.

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \sqrt{[\![x+1]\!] - |x| - \frac{1}{2}}$$

A) $\langle 0\,;\,\frac{\sqrt{5}}{2}\rangle$ B) $\left[0\,;\frac{\sqrt{2}}{5}\right]$ C) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{5}\,;\,0\right]$

D) $[\frac{\sqrt{2}}{5}\,;\,2\,\rangle$ E) $\langle 0\,;\,\infty\rangle$

PROBLEMA 106

Determinar el dominio de la función:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \sqrt{1 - 2\text{sen}^2 x}$$

A) $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right] \cup \langle\, 3\frac{\pi}{4}\,;\,5\frac{\pi}{4}\,\rangle$

B) $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[3\frac{\pi}{4}\,;\,5\frac{\pi}{4}\right]$

C) $\langle -\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\,\rangle$ D) $\langle\frac{\pi}{2}\,;\,3\frac{\pi}{2}\rangle$ E) $\langle 0\,;\,2\pi\rangle$

PROBLEMA 107

Determinar el dominio y rango de la función:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$$

indicando el conjunto: $D_F - R_F$.

A) $\{-2 ; -3\}$ B) $\{-4 ; 1\}$ C) $\mathbf{R}$

D) $\langle -\infty ; -4\rangle$ E) $\langle -4 ; 1\rangle$

PROBLEMA 108

Dadas las funciones:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \sqrt{(x^{-1}-1)^{-1}}$$

$$G: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = G(x) = |x|$$

Determinar el dominio de FoG.

A) $\mathbf{R} - \{0\}$ B) $\mathbf{R} - \{0 ; 1\}$ C) $\langle -1 ; 1\rangle$

D) $\langle -1 ; 0\rangle \cup \langle 0 ; 1\rangle$ E) $\mathbf{R} - \{1\}$

PROBLEMA 109

Determinar el número de asíntotas verticales de la función

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$$

A) 1 B) 2 C) 3

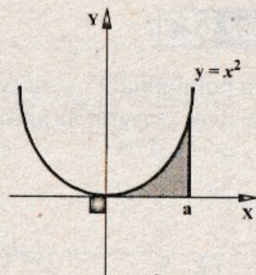
D) 4 E) NA

PROBLEMA 110

Calcular el área de la región representada por la relación:

$F = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, |y| \geq x^2 \wedge |y| \leq |x|\}$

Sabiendo que el área de la región sombreada es $\frac{a^3}{3}\mu^2$.



A) $\frac{a^3}{2}\mu^2$ B) $\frac{a^3}{6}$ C) $\frac{2}{3}a^3$

D) $\frac{5}{3}a^3$ E) $\frac{5}{6}a^3$

PROBLEMA 111

Determinar el rango de la función:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{|x+5| + |x-4|}{|x^2+6|} \;;$$

$$x \in \langle 1 ; 3\rangle$$

A) $[1 ; \frac{9}{5}]$ B) $\langle 1 ; \frac{9}{5}]$ C) $[1 ; \frac{9}{5}\rangle$

D) $\langle 1 ; \frac{9}{5}\rangle$ E) $[1 ; \frac{5}{2}\rangle$

PROBLEMA 112

Dada la función

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

Indicar las abcisas de los puntos en la cual la función no es continua.

A) $-2 \wedge -3$ B) $-2 \wedge 3$ C) $2 \wedge -3$

D) $2 \wedge 3$ E) $\mathbf{R} - \{2 ; 3\}$



PROBLEMA 113

Determinar las asíntotas de la siguiente función :

$$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{1}{x-4}$$

A) $x = 0 \wedge y = 4$ B) $x = 4 \wedge y = 0$

C) $x = -4 \wedge y = 0$ D) $x = 0 \wedge y = -4$

E) N.A.

PROBLEMA 114

Dada la función:

$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = (1-x)^{-1}$

Determinar el dominio de FoFoF.

A) $\mathbf{R}$ B) $\mathbf{R} - \{1\}$ C) $\mathbf{R} - \{0 ; 1\}$

D) $\mathbf{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$ E) $\mathbf{R} - \{0\}$

PROBLEMA 115

Dadas las funciones:

F = {(2 ; 4), (3 ; 2), (1 ; –2), (–1 ; 5), (–2 ; 3)}

G = {(–1 ; 2), (0 ; 3), (2 ; –3), (3 ; 1), (6 ; –1)}

Encontrar G o F.

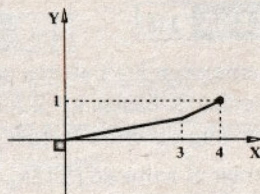
A) {(3 ; 3), (1 ; –2)} B) {(3 ; –3), (–2 ; 1)}

C) {(2 ; 3), (1 ; –2)} D) {(3 ; 3), (–2 ; 1)}

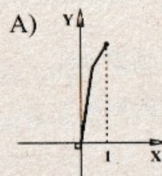
E) {(2 ; 4), (5 ; 6)}

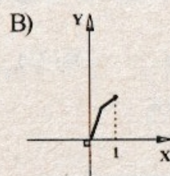
PROBLEMA 116

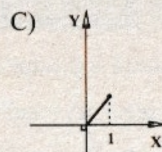
La gráfica de F es:

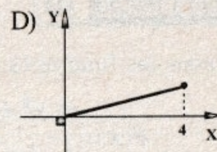


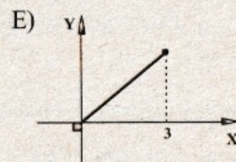
Entonces la gráfica que corresponde a F o F* es:

A)


B)


C)


D)


E)


PROBLEMA 117

Sean las funciones:

F = {(2 ; 5), (3 ; 4), (9 ; 5), (6 ; 8), (1 ; 7)}

G = {(3 ; 4), (2 ; 3), (5 ; 2), (1 ; 7), (8 ; 1)}

Determinar F + G.

A) {(2 ; 8), (5 ; 2), (1 ; 14)}

B) {(2 ; 8), (3 ; 8), (1 ; 14)}

C){(2 ; 8), (3 ; 8), (1 ; 7)}

D) {(2 ; 8), (1 ; 8), (9 ; 5)}

E) {(2 ; 8), (1 ; 14), (3 ; 7)}

PROBLEMA 118

Designemos con F(x) al área de un trapecio isósceles de bases: $a = 2 \wedge b = 1$, donde x es el ángulo entre la base y un lado. Determinar el valor de $[F(2x_0)]^2$

Sabiendo que: $F^*\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = x_0$

A) 9/8 B) 3/4 C) 27/16

D) 9/16 E) 81/4

PROBLEMA 119

Dadas las funciones:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; \quad x < -1 \\ x + 1 & ; \quad x \geq -1 \end{cases}$$

$G(x) = 2x - 1 \quad ; \quad x < 0$

Encontrar F + G.

A) $\begin{cases} x^2 + 2x & ; \ x < -1 \\ 2x & ; \ -1 \leq x < 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x^2 - 2x & ; \ x < -1 \\ 3x & ; \ -1 \leq x < 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x^2 + 2x & ; \ x < -1 \\ 3x & ; \ -1 \leq x < 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x^2 - 2x & ; \ x < -1 \\ x & ; \ -1 \leq x < 0 \end{cases}$

E) $\begin{cases} x^2 + 2x - 2 & ; \ x < -1 \\ x & ; \ -1 \leq x < 0 \end{cases}$

PROBLEMA 120

Siendo:

$F = \{(1;2),(0;-1),(2;3),(5;1),(4;2),(-1;1)\}$

$G(x) = x - \sqrt{x+1} \ ; \ \forall x \in [-1;4\rangle$

Encuentre la suma de todos los valores racionales de x_o de modo que:

$(G^3 + 2F)^*(x_o) \in \mathbf{R}.$

A) –2 B) –1 C) 0

D) 2 E) –4

PROBLEMA 121

Dadas las funciones:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = 2x + 3$

G: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = G(x) = [\![2x - 1]\!]$

Encontrar: F/G

A) $\dfrac{2x+3}{[\![2x-1]\!]}$; $\forall x \in \langle -\infty ; 0]$

B) $\dfrac{[\![2x-1]\!]}{2x+3}$; $\forall x \in \langle -\infty ; 0]$

C) $\dfrac{2x+3}{[\![2x-1]\!]}$; $\forall x \in \langle -\infty ; \frac{1}{2}\rangle \cup [1 ; \infty\rangle$

D) x ; $\forall x \in \langle -\infty ; 0\rangle$

E) N.A.

PROBLEMA 122

Si el dominio de la siguiente función:



F: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ / $y = F(x) = 3|-x| - 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ es $\langle -5 ; -1]$, indicar $F^*(4)$

A) –1 B) –4 C) 2

D) –2 E) –5

PROBLEMA 123

Dadas las funciones:

F: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ / $y = F(x) = 2x + 6$; $x \in [0 ; 8]$

G: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ / $y = G(x) = x^2 - 1$; $x \in [-2 ; 2\rangle$

Determinar la regla de correspondencia de FoG.

A) $2x^2 - 4$ B) $2x + 4$ C) $2x^2 - 2$

D) $2x^2 + 4$ E) $2x - 4$

PROBLEMA 124

Sea F una función tal que:

$F(-x) = -x^2 + 10x - 4$; $-b \le x \le -a$ con $b < -11/2$, si el dominio de FoF* es [12 ; 20], entonces "a" es:

A) 8 B) 7 C) 6

D) 9 E) 6,5

PROBLEMA 125

Si: $G(x) = x^3 \wedge [G \text{ o } F](x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Encontrar $F(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

A) $x + 1$ B) $x + 2$ C) $x - 1$

D) $x - 3$ E) $x^2 + 2$

PROBLEMA 126

Marcar verdadero (V) o falso (F)

I) Si F es impar entonces F* no necesariamente es impar

II) Pueden existir inversas de funciones periódicas

III) Si existe F*, entonces se verifica (F*)* = F

A) VVV B) VFF C) FFV

D) FVV E) FVF

PROBLEMA 127

Dadas las funciones:

$F(x) = 3x - 1$; $x \in \langle -8 ; 7\rangle$

$G(x) = x^2 + 6x$; $x \in [-1 ; 3\rangle$

Determinar F o G.

A) $3x^2 + 18x$; $x \in [-1 ; 1]$

B) $2x^2 + 18x - 1$; $x \in \langle -1 ; 1\rangle$

C) $3x^2 + 18x - 1$; $x \in [-1 ; 1]$

D) $18x - 1$; $x \in [-1 ; 1]$

E) $3x^2 - 1$; $x \in [-1 ; 1]$

PROBLEMA 128

Se define la función F como :

$F(x) = \text{máx}\{x ; x^3\}$; $\forall x \ge 0$, luego $\forall x \ge 0$ F* se define como:

A) $\text{máx}\{x ; x^3\}$ B) $\text{máx}\{x ; \sqrt[3]{x}\}$

C) $\text{mín}\{x ; x^3\}$ D) $\text{mín}\{x ; \sqrt[3]{x}\}$

E) $\nexists$F*

PROBLEMA 129

Dadas las funciones:

$$F(x)=\begin{cases} x^2-4 \ ; \ x\le 0 \\ x+2 \ ; \ x>2 \end{cases}$$

$G(x)=4x-x^2 \ ; \ x\in[0\,;7]$

Determinar: F o G

A) $\begin{cases} 4x+2 & ; \ x\in\langle\sqrt{2}\,;2\rangle \\ (4x-x^2)^2-4; & x\in[4\,;7] \end{cases}$

B) $\begin{cases} 4x-x^2+2 & ; x\in\langle 2-\sqrt{2}\,;2+\sqrt{2}\rangle \\ (4x-x^2)^2-4; & x\in[4\,;7]\cup\{0\} \end{cases}$

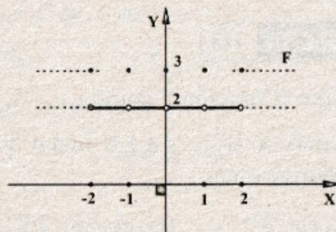
C) $\begin{cases} 4x+x^2+2 & ; x\in\langle 2-\sqrt{2}\,;2+\sqrt{2}\rangle \\ (4x-x^2)^2+4; & x\in[4\,;7] \end{cases}$

D) $\begin{cases} 4x-2 & ; x\in\langle 2-\sqrt{2}\,;2+\sqrt{2}\rangle \\ 2x+3 & ; \ x\in[4\,;7] \end{cases}$

E) N.A.

PROBLEMA 130

Indicar la regla de correspondencia de la siguiente gráfica:



A) $F(x)=\begin{cases} 3 \ ; \ x\in\mathbf{Z} \\ 2 \ ; \ x\in\mathbf{R}-\mathbf{Z} \end{cases}$

B) $F(x)=\begin{cases} 3 \ ; \ x\in\mathbf{R}-\mathbf{Z} \\ 2 \ ; \ x\in\mathbf{Z} \end{cases}$

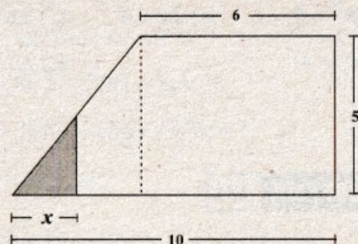
C) $F(x)=\begin{cases} 2 \ ; \ x\in\mathbf{R} \\ 3 \ ; \ x\in\mathbf{Z} \end{cases}$

D) $F(x)=\begin{cases} 2 \ ; \ x\in\mathbf{Z} \\ 3 \ ; \ x\in\mathbf{R} \end{cases}$

E) N.A.

PROBLEMA 131

Del gráfico trapecio rectángulo, expresar el área de la región sombreada en términos de x.



A) $\frac{5}{4}x^2\,;0\le x\le 4$ B) $\frac{5}{8}x^2\,;0\le x\le 4$

C) $\frac{5}{4}x^2\,;0<x\le 6$ D) $\frac{5}{4}x^2\,;4<x\le 10$

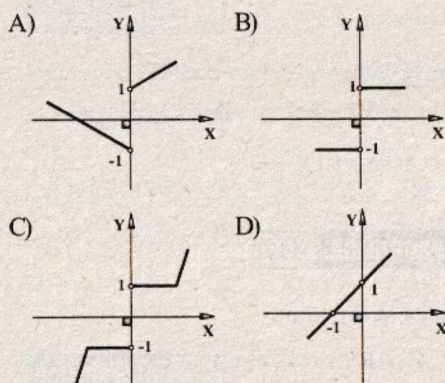
E) $\frac{5}{8}x^2\,;1\le x\le 4$

PROBLEMA 132

Esbozar la gráfica de la función:

$$F: \mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}\,/\,y=F(x)=\frac{1}{|x|}x^2+|x|\frac{1}{x}$$





E) N.A

PROBLEMA 133

Determinar el rango de la función:

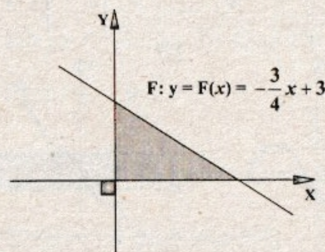
F: **R** → **R** / $y = F(x) = \operatorname{sen}x + \sqrt{\operatorname{sen}x}$

A) [–1 ; 1] B) [0 ; 1] C) [0 ; 2]

D) [1 ; 2] E) [–1 ; 2]

PROBLEMA 134

Calcular el área de la región sombreada.

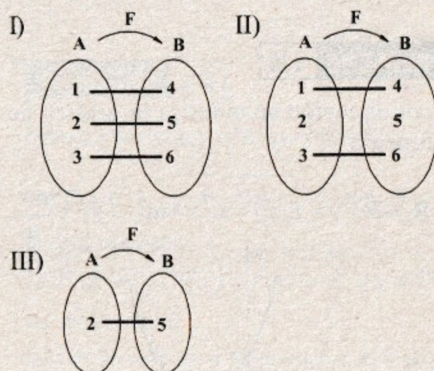


A) $6\mu^2$ B) $5\mu^2$ C) $4\mu^2$

D) $3\mu^2$ E) $9\mu^2$

PROBLEMA 135

¿Cuál (o cuáles) de las funciones definidas en los diagramas sagitales representa a una aplicación?



A) sólo I B) sólo II C) sólo III

D) I ∧ III E) ninguno

PROBLEMA 136

Dada la función:

$$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{x^5 - x + 10}{(x^2 + x)(\,|x| - 1)}$$

¿En cuántos puntos no es continua?

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 137

Dada la función:

F: **R** → **R** / $y = F(x) = x^2 + mx - m - 1$

Determinar la suma de todos los valores

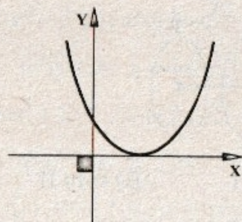
que asume "m" de modo que - 4 sea el mínimo de F.

A) 8 B) 4 C) –4
D) –8 E) 10

PROBLEMA 138

A continuación se muestra la gráfica de la función.

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = x^2 - (m-1)x + \dfrac{m^2}{4}$

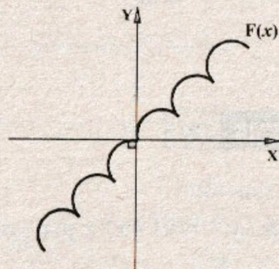


Luego el valor de "m" es:

A) 1 B) –1 C) –1/2
D) 1/2 E) 3/2

PROBLEMA 139

Si F(x) es una función donde solamente intervienen "x" y "sen$x$" entonces la gráfica siguiente:



Representa a:

A) sen$x + x$ B) sen$x - x$
C) $|$sen$x| + x$ D) $|$sen$x| - x$
E) $|$sen$x| + |x|$

PROBLEMA 140

Dada la función:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = x^5 + x - 10$

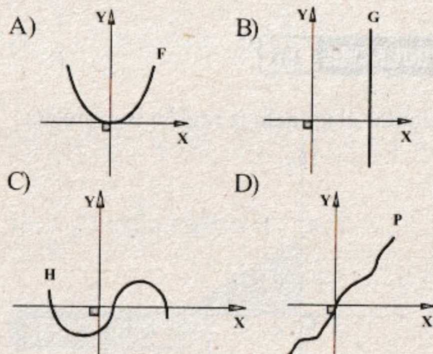
podemos afirmar que:

I) es creciente II) es inyectiva
III) no tiene inversa.

A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I ∧ II E) I ∧ III

PROBLEMA 141

Reconocer a la gráfica de una función biyectiva.



E) B ∨ D



PROBLEMA 142

Sea F una función real de variable real de modo que $\forall x \in \mathbf{R}$ verifica:

$F(x+1) = -F(x) \;\wedge\; F(x) = F(-x)$

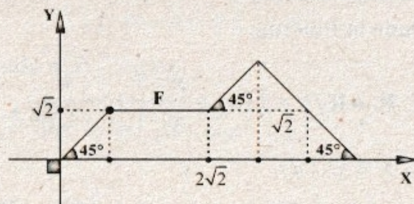
Calcular F(800 ; 6), siendo F(998 ; 6) = –3.

A) 0 B) 3 C) –3

D) 1 E) –1

PROBLEMA 143

La gráfica de una función esta representada en la figura adjunta.



Halle usted su regla de correspondencia para $x \in [\, 2\sqrt{2} \;;\; 3\sqrt{2}\,\rangle$

A) $F(x) = x + \sqrt{2}$ B) $F(x) = x - \sqrt{2}$

C) $F(x) = x - 2\sqrt{2}$ D) $F(x) = x + 2\sqrt{2}$

E) $F(x) = x - 3\sqrt{2}$

PROBLEMA 144

Determinar si las funciones:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = x^2$

G: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = G(x) = x^3$

H: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = H(x) = x^2 + 6x + 1$

Son equivalentes

A) sólo F B) sólo G C) $F \wedge G$

D) $G \wedge H$ E) Todas

PROBLEMA 145

Marcar verdadero (V) o falso (F)

I) $F(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 8x + 7}$; $x \leq -9$

es univalente.

II) F: $\mathbf{R} \to [0 ; 9]$ / $y = F(x) = x^2$; $x \in [0 ; 3]$

es suryectiva.

III) F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = x^2$; $x \in \mathbf{R}$

es suryectiva.

A) VFF B) VFV C) VVF

D) FFF E) VVV

PROBLEMA 146

Si:
$$F(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3 & ; \quad x \leq -2 \\ 3 + \sqrt{x} & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Determinar F*

A) $\begin{cases} -2 - \sqrt{1-x} & ; \; x \leq 4 \\ (x-3)^2 & ; \; x > 4 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 2 + \sqrt{1-x} & ; \; x \leq 4 \\ (x-3)^2 & ; \; x > 4 \end{cases}$

C) $\begin{cases} -2 - \sqrt{1-x} & ; \; x \leq 1 \\ (x-3)^2 & ; \; x \geq 4 \end{cases}$

D) $\begin{cases} (x-3)^2 & ; \ x \le 1 \\ -2+\sqrt{1-x} & ; \ x \ge 4 \end{cases}$

E) N.A.

PROBLEMA 147

Si: $F(x) = \begin{cases} -x^2+1 & ; \ x < -1 \\ x+1 & ; \ x \ge -1 \end{cases}$

Determinar F*

A) $\begin{cases} -\sqrt{1-x} & ; \ x < 0 \\ x+1 & ; \ x \ge 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} \sqrt{1-x} & ; \ x < 0 \\ x-1 & ; \ x \ge 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} -\sqrt{1-x} & ; \ x < 0 \\ x-1 & ; \ x \ge 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} \sqrt{1-x} & ; \ x < 0 \\ \sqrt{4+x} & ; \ x > 0 \end{cases}$

E) N.A.

PROBLEMA 148

Si: $F(x) = \begin{cases} 2x-1 & ; \ x < 0 \\ \sqrt{x} & ; \ x \ge 0 \end{cases}$

Determinar F*

A) $\begin{cases} x+1 & ; \ x < -1 \\ x^2 & ; \ x \ge 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & ; \ x < -1 \\ x^2 & ; \ x \ge 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x-1 & ; \ x < -1 \\ x^2 & ; \ x \ge 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & ; \ x < -1 \\ x^2 & ; \ x \ge 0 \end{cases}$

E) N.A.

PROBLEMA 149

Dada la función:

$$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \ / \ y = F(x) = \frac{x-3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \ ;$$

$x \in \langle 1 \ ; 2 \rangle$

Determinar F*

A) $\dfrac{2-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad ; \quad x \in \langle 0 \ ; \infty \rangle$

B) $\dfrac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad ; \quad x \in \langle 0 \ ; \infty \rangle$

C) $\dfrac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad ; \quad x \in \langle -\infty \ ; \infty \rangle$

D) $\dfrac{2-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad ; \quad x \in -[0 \ ; \infty \rangle$

E) NA



PROBLEMA 150

Si la relación:

$R = \{(1 ; 2a), (2 ; 7), (5 ; 1), (1 ; 3a-5), (7 ; 9)\}$

es una función, la suma de los elementos del rango de dicha función es:

A) 22 B) 15 C) 27

D) 16 E) 10

PROBLEMA 151

Sea $F: [a ; b] \to \mathbf{R} / F(T) = T^2$

El menor valor de k tal que:

$$|F(T) \cdot (b-a)| \leq k \;;\; \forall T$$

Siendo $a|b| > 0$ es:

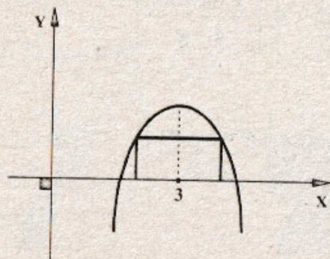
A) $b^2 - a^2$ B) $(b-a)a^2$ C) $\dfrac{b^2-a^2}{2}$

D) $(b-a)b^2$ E) $a^2 + b^2$

PROBLEMA 152

La gráfica adjunta corresponde a:

$y = -x^2 + 6x - 5$, se inscribe un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, entonces la expresión para el área de ese rectángulo es:



A) $2(3-x)[4-(x-3)^2]$

B) $(3-x)[2-(x-3)^2]$

C) $(3-x)[4-(x-3)^2]$

D) $(3-x)\left[2-\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2\right]$

E) $(3-x)\left[4-\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2\right]$

PROBLEMA 153

Dadas las funciones:

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / y = F(x) = mx + 12 \;;\; m \neq 0$

$G: \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R} / y = G(x) = \dfrac{2}{x}$

¿Para qué valores de "m" las funciones admiten dos puntos de intersección?

A) $\langle -\frac{1}{2} ; \infty \rangle$ B) $\langle -\frac{1}{18} ; 0 \rangle \cup \langle 0 ; \infty \rangle$

C) $\langle -\infty ; -\frac{1}{18} \rangle$ D) $\langle -18 ; 0 \rangle$

E) $\langle -\frac{1}{18} ; \frac{1}{18} \rangle$

PROBLEMA 154

El producto de los coeficientes de la función polinomial de menor grado que pasa por los puntos (0 ; 0), (1 ; 1), (2 ; 0) y (3 ; –1) es:

A) –15/4 B) –14/9 C) 5/9

D) –15/9 E) –16/9

PROBLEMA 155

El rectángulo de mayor área en el primer cuadrante con dimensiones enteras cuyos lados son paralelos a los ejes, dos de ellos sobre los ejes y un vértice en la parábola de ecuación: $y = -2x^2 + 8x$, tiene como área:

A) $6\mu^2$ B) $12\mu^2$ C) $14\mu^2$

D) $16\mu^2$ E) $18\mu^2$

PROBLEMA 156

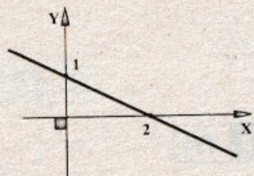
Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados y el cuarto vértice sobre la recta de ecuación $y = -2x + 8$. El área máxima que puede tener el rectángulo es:

A) $8\mu^2$ B) $9\mu^2$ C) $10\mu^2$

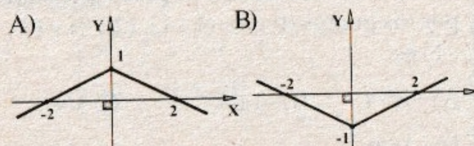
D) $11\mu^2$ E) $12\mu^2$

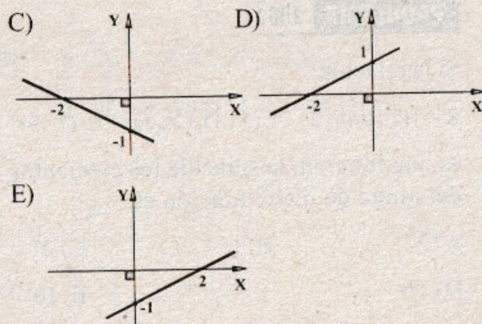
PROBLEMA 157

Si la gráfica representa a: $y = F(x)$



¿Cuál de las gráficas representa a: $y = F(-x)$?





PROBLEMA 158

Dada la relación definida por:

$S = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, |y| < |x| \wedge |x| < 3\}$

Hallar el número de elementos del conjunto:

$P = \{(x ; y) \in S \,/\, x \wedge y \in \mathbf{Z}\}$

A) 4 B) 8 C) 9

D) 13 E) 27

PROBLEMA 159

La función F que para todo x diferente de $0 ; 1 \wedge -1$ satisface la ecuación:

$$[\,F(x)\,]^2 \cdot F = \left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x \text{ es:}$$

A) $F(x) = 4\left[\dfrac{x^2(1+x)}{1-x}\right]^{\frac{1}{3}}$

B) $F(x) = 2\left[\dfrac{x^2(1+x)}{x-1}\right]^{\frac{1}{3}}$



C) $F(x)=4\left[\dfrac{x\,(1+x)}{1-x}\right]^{\frac{1}{3}}$

D) $F(x)=4\left[\dfrac{x^2(1+x)}{1-x}\right]^{\frac{1}{2}}$

E) $F(x)=4\left[\dfrac{x\,(1+x)}{1-x}\right]^{\frac{1}{2}}$

PROBLEMA 160

Sean las funciones:

$G=\{(3\,;9),(4\,;16),(5\,;25),(6\,;36)\}$

$GoF=\{(1\,;9),(2\,;16),(3\,;25),(4\,;36)\}$

Obtener F:

A) $F=\{(1\,;4),(2\,;3),(3\,;5),(4\,;6)\}$

B) $F=\{(1\,;2),(2\,;4),(3\,;6),(4\,;5)\}$

C) $F=\{(1\,;3),(2\,;4),(4\,;6),(5\,;5)\}$

D) $F=\{(1\,;3),(2\,;4),(3\,;5),(4\,;36)\}$

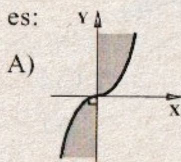
E) $F=\{(1\,;3),(2\,;4),(3\,;5),(4\,;6)\}$

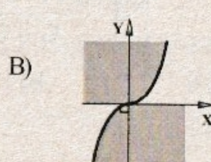
PROBLEMA 161

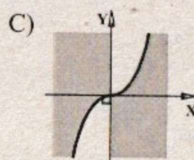
La gráfica del conjunto:

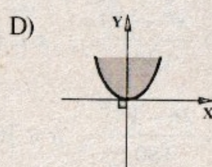
$$A=\left\{(x\,;\,y)\in\mathbf{R}^2\,/\,\frac{x}{|x|}y\le x^2\right\}\cup\{(0;\;0)\}$$

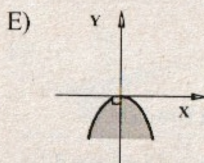
es:

A)


B)


C)


D)


E)


PROBLEMA 162

Dadas la funciones:

$F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\,/\,y=F(x)=\sqrt{x^2-4}$

$G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\,/\,y=G(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

Determinar el rango de FoG:

A) $\langle 2\,;4\rangle$ B) $\langle -4\,;-2\rangle$ C) $\langle 2\,;\infty\rangle$

D) $\langle -\infty\,;-2\rangle$ E) $\langle 0\,;\infty\rangle$

PROBLEMA 163

La inversa de la función:

$F(x)=\sqrt{5-x}\,(|x-5|+1+x)$ esta dada por:

A) $\dfrac{20-x^2}{36}$; $x\in[0\,;\infty\rangle$

B) $\dfrac{180-x^2}{36}$; $x\in[0\,;\infty\rangle$

C) $\dfrac{x^2-20}{36}$; $x\in\langle 0\,;\infty\rangle$

D) $\dfrac{x^2-180}{36}$; $x \in [0\,;\infty\rangle$

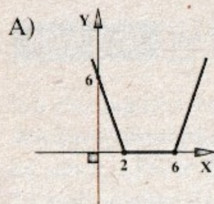
E) $\dfrac{36-x^2}{180}$; $x \in [0\,;\infty\rangle$

PROBLEMA 164

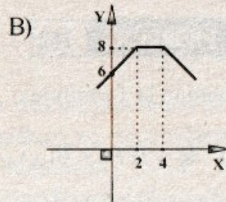
Esbozar la gráfica de la función:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = |x-2| + |x-4|$

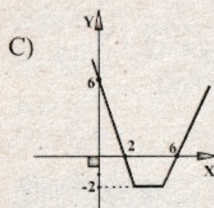
A)



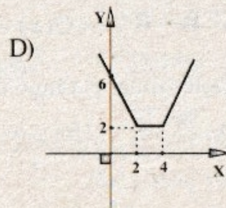
B)



C)



D)



E) N.A.

PROBLEMA 165

Sea $F(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 1$ una función definida para los x que cumplen la siguiente relación: $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{3}$. Hallar el intervalo donde varia F(x)

A) $\langle -2\,;-1]$ B) $[2\,;5{,}25\rangle$ C) $[1\,;2{,}25\rangle$

D) $[3\,;5{,}25\rangle$ E) $[2\,;5]$

PROBLEMA 166

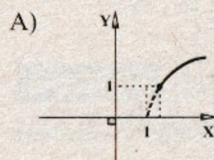
Dadas las funciones:

F: $[1\,;\infty\rangle \to \mathbf{R}$ / $y = F(x) = x^2 - |x|$

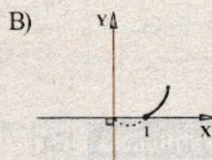
G: $[1\,;\infty\rangle \to \mathbf{R}$ / $y = G(x) = \sqrt{x}$

Entonces la gráfica de la función GoF es aproximadamente:

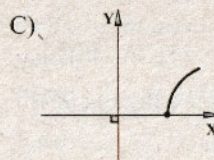
A)



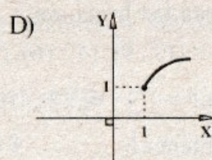
B)



C)



D)



E) N.A.

PROBLEMA 167

En la tabla siguiente aparecen varios valores de dos funciones F ∧ G.

x	5	6	7	8
F(x)	8	7	6	5
G(x)	7	8	6	5

Determinar el valor de:

$$\left[\frac{(G+F)\text{ o }F-2}{G\text{ o }G}\right](6)$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4



PROBLEMA 168

Un avión realiza una maniobra a velocidad supersónica según la trayectoria : $2y^2 - x^2 = 48$

Hallar la menor distancia de la trayectoria al punto (6 ; 0)

A) 9 B) 8 C) 7

D) 6 E) 5

PROBLEMA 169

Determinar el rango de la siguiente función:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \frac{x}{|x|}\,[(x-1)^2 + 2|x|]$$

A) $\mathbf{R} - [-1 ; 1]$ B) $\langle -\infty ; 0\rangle$

C) $\langle 0 ; \infty\rangle$ D) $\langle -1 ; \infty\rangle$

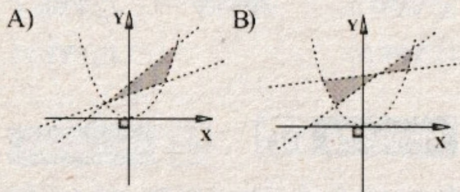
E) $\mathbf{R} - \langle -1 ; 1\rangle$

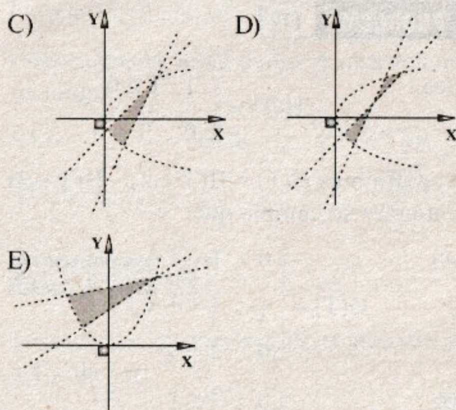
PROBLEMA 170

Dadas las siguientes inecuaciones:

$$x^2 - y < 0 \;;\; x + 4 < 3y \;;\; y < x + 2$$

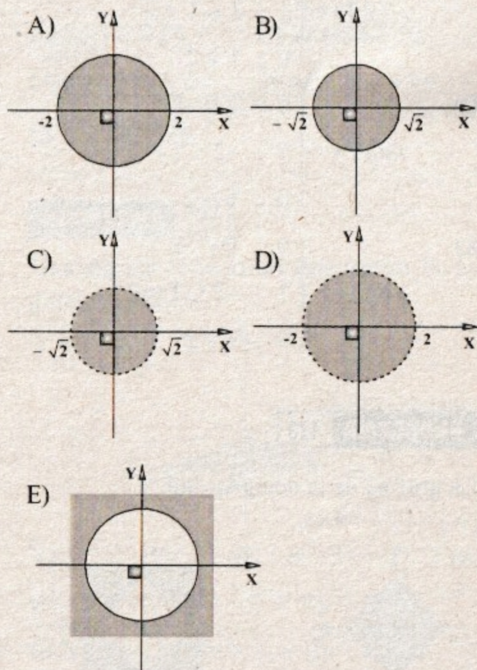
Entonces los pares $(x ; y)$ que satisfacen estas inecuaciones están representados por la región sombreada.





PROBLEMA 171

La gráfica de la siguiente desigualdad $x^2 + y^2 < 2$ es:





PROBLEMA 172

Sea:
$$H(T)=\begin{cases}1\ ;\ T\geq 0\\ 0\ ;\ T<0\end{cases}$$

Si definimos $G(T) = H(T+2) - H(T-2)$ entonces se cumple que:

A) $G(T)=\begin{cases}0\ ;\ T<1\\ 1\ ;\ 1<T<2\\ 0\ ;\ T>2\end{cases}$

B) $G(T)=\begin{cases}0\ ;\ T\leq 1\\ 1\ ;\ 1<T<2\\ 0\ ;\ T\geq 2\end{cases}$

C) $G(T)=\begin{cases}0\ ;\ T<1\\ 1\ ;\ 1\leq T<2\\ 0\ ;\ T\geq 2\end{cases}$

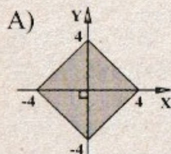
D) $G(T)=\begin{cases}0\ ;\ T\leq -2\\ 1\ ;\ -2<T<2\\ 0\ ;\ T\geq 2\end{cases}$

E) $G(T)=\begin{cases}0\ ;\ T<-2\\ 1\ ;\ -2\leq T<2\\ 0\ ;\ T\geq 2\end{cases}$

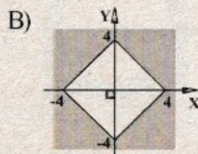
PROBLEMA 173

La gráfica de la desigualdad: $|x|+|y|<4$ es:

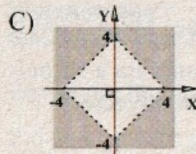
A)



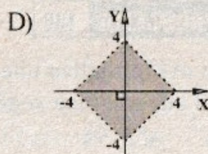
B)



C)



D)



E) N.A.

PROBLEMA 174

Sea la función F: $\langle 1\ ;\infty\rangle \rightarrow$ **N** tal que $F(x)$ es el número de primos menores o iguales a x, si:

$$G(x)=\frac{F(\sqrt{2})x^2+3F(8)}{x+F(F(F(23)))}$$

A) 0 B) 1 C) 17/7

D) 13/5 E) 3

PROBLEMA 175

Marcar verdadero (V) o falso (F):

I) si $x_1 = x_2 \Longrightarrow F(x_1) = F(x_2)$ para toda función F.

II) Si : $F(x)=\dfrac{3}{ax-4}$; $x\in[-2\ ;4\rangle$ entonces F es una función sobreyectiva sobre $x\in[-2\ ;2\rangle$

III) Toda función impar es univalente.

A) VVV B) FFV C) VVF

D) VFF E) FVF

PROBLEMA 176

Determinar el conjunto de valores del número real "m" tal que la función:



$$F(x) = (mx^2 - 2mx + 1)^{-1}$$

Esté definida en [0 ; 1]

A) $\langle -\infty ; 0]$ B) $\langle -\infty ; 1\rangle$ C) $\langle 0 ; \infty\rangle$

D) $[0 ; 1\rangle$ E) $[1 ; \infty\rangle$

PROBLEMA 177

F, G ∧ H son tres conjuntos definidos por:

$F = \{(T^2 + 2 ; T) \in \mathbf{R}^2 / T \in \mathbf{R}\}$

$F = \{(x ; y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 = 4\}$

$F = \{(\text{sen}T ; T) \in \mathbf{R}^2 / T \in \mathbf{R}\}$

¿Cuál de los conjuntos representa a una función?

A) F B) G C) H

D) F ∧ G E) N.A

PROBLEMA 178

Marcar verdadero (V) o falso (F)

I) $F = \{(y ; |x|) \in \mathbf{R}^2 / y = |x|\}$ es una función con dominio **R**.

II) $G = \{(T + r ; T - r) \in \mathbf{R}^2 / T \wedge r \in \mathbf{R}\}$ es una función.

III) $H = \{(T^2 ; T) \in \mathbf{R}^2 / T \in \mathbf{R}\}$ no es una función.

A) FVF B) VVV C) FFF

D) VFF E) FFV

PROBLEMA 179

Dada la función F, donde:

$F = \{(4 ; k), (2 ; 5k), (7 ; 2k^2 + 1), (4 ; 2k - 1)\}$

Determinar la suma de los elementos de su rango.

A) 6 B) 8 C) 9

D) 11 E) 13

PROBLEMA 180

Si ⟨a ; b] es el dominio de la función F definida por:

$$F = \left\{\left(\frac{2x+1}{2x+3} \; ; \; x\right) \in \mathbf{R}^2 / x \in \langle 0 ; 10]\right\}$$

Entonces la relación correcta entre los valores de a y b es:

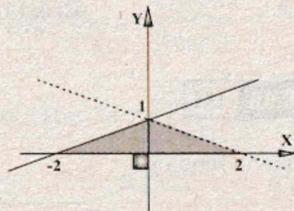
A) a + 3b = 25 B) 3a + 6b = 10

C) 6a + 23b = 25 D) 6a + 46b = 44

E) 5a + 6b = 36

PROBLEMA 181

Una de las relaciones determinó la siguiente gráfica:



A) $y > 0 \vee 2y - x - 2 < 0 \vee 2y + x - 2 < 0$

B) $y \geq 0 \vee 2y < x + 2 \vee 2y \leq 2 - x$

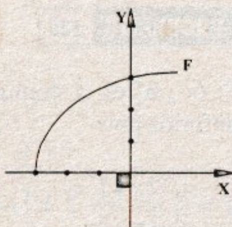
C) $y \geq 0 \wedge 2y < x + 2 \wedge 2y + x < 2$

D) $y \geq 0 \wedge 2y - 2 \leq x \wedge 2y + x < 2$

E) $y > 0 \wedge x - 2y + 2 \geq 0 \wedge x < 2 - 2y$

PROBLEMA 182

Halle la regla de correspondencia de la siguiente función:



A) $F(x) = \sqrt{9x+3}$

B) $F(x) = \sqrt{x+3}$

C) $F(x) = \sqrt{3-x}$

D) $F(x) = \sqrt{x^2+9}$

E) $F(x) = \sqrt{3x+9}$

PROBLEMA 183

Una ventana en forma rectangular esta rematada en la parte superior por un semicírculo ¿cuál debe ser la base del rectángulo para que la ventana tenga la mayor superficie, siendo el perímetro igual a 2m?

A) $4 + \pi$ B) $1+\pi$ C) $4/\pi$

D) $1/4 + \pi$ E) $4/(4+\pi)$

PROBLEMA 184

Graficando la función.

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = 2 - \sqrt{5 - 4x - x^2}$

podemos afirmar que:

A) Es creciente en todo su dominio.

B) Es decreciente cuando $x \in \langle -2 \,;\, 1 \rangle$

C) Tiene un valor mínimo igual a -1.

D) Su rango es $[2 \,;\, 5]$

E) N.A.

PROBLEMA 185

Determinar el rango de la siguiente función:

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = F(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$

A) $[0 \,;\, 2\sqrt{2}\,]$ B) $\langle 0 \,;\, \sqrt{2}\,\rangle$

C) $[\sqrt{2} \,;\, 2]$ D) $\langle \sqrt{2} \,;\, 4 \rangle$

E) $\langle 2 \,;\, 2\sqrt{2}\,\rangle$

PROBLEMA 186

Dada la función:

$$G: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, y = G(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

con dominio igual a: $[-1 \,;\, 1\rangle \cup \langle 1 \,;\, 4]$ la función F tiene dominio igual a:

$\langle -1 \,;\, 1 \rangle \cup \langle 1 \,;\, 2]$ y es tal que verifica:

$$F(G(x)) = x^2 - x + 1$$

¿Cuál es la regla de correspondencia de F?.

A) $F(x) = \dfrac{x+3}{(x-2)^2}$ B) $F(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}$

C) $F(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2}$ D) $F(x) = \dfrac{x^2+3}{(x-1)^2}$

E) $F(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$.

PROBLEMA 187

Dada la función:

$$F(x)=\begin{cases} x^2-4 & ; x\leq -2 \\ x-|x| & ; -2<x<2 \\ \sqrt{x-2} & ; x\geq 2 \end{cases}$$

Indicar lo correcto:

A) Es creciente en $\langle -\infty ; -2\rangle$

B) Es decreciente en $\langle -2 ; 2\rangle$

C) Es no creciente en $\langle -\infty ; 0\rangle$

D) Es no decreciente en $\langle 0 ; \infty\rangle$

E) N.A.

PROBLEMA 188

La función H que verifica:

$(GoFoH)(x)=x^6-8x^3+1-3x^3(x-2)(2x-1)$

Donde: $F(x)=x^2 \wedge G(x)=x^3$, es:

A) Función lineal

B) Función identidad

C) Función cuadrática

D) Función raíz cuadrada

E) F.D.

PROBLEMA 189

Siendo las funciones:

$F=\{(3;6),(5;9),(7;5),(8;4)\}$

$G=\{(3;9),(5;12),(8;7)\}$

Determinar una función H, tal que HoF = G.

A) $H=\{(3;3),(5;5),(7;8)\}$

B) $H=\{(3;3),(5;5),(8;8)\}$

C) $H=\{(6;3),(9;5),(8;7)\}$

D) $H=\{(3;9),(5;12),(8;7)\}$

E) $H=\{(4;7),(6;9),(9;12)\}$

PROBLEMA 190

Sea F una función definida en el conjunto **Z** según:

$$F(x)=\begin{cases} x-3 & ; x\geq 100 \\ F(F(x+5)) & ; x<100 \end{cases}$$

Calcular: F(97)

A) 99 B) 98 C) 97

D) 100 E) F.D.

PROBLEMA 191

Dada la función $F: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, definida por:

I) $F(0)=1$

II) $F(n)=\dfrac{2F(n-1)-1}{2F(n-1)+5}$; $\forall n \in \mathbf{N}$

consideremos también la función:

$G: \mathbf{N} \to \mathbf{R} / G(n)=\dfrac{2F(n)+1}{F(n)+1}$

luego el valor de $\dfrac{G(n)}{G(n-1)}$ es:

A) –1/5 B) 1/4 C) 3/2

D) 3/4 E) 1/2

PROBLEMA 192

Dada la función:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / y = F(x) = Sgn(x + 1) – Sgn(x – 1)

¿Cuál es el mayor valor que asume uno de los elementos de su rango?

A) 0 B) –1 C) 1

D) 2 E) –2

PROBLEMA 193

Determinar el rango de la siguiente función:

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / y = F(x) = |x–2| + |x+2| – |x| – 1

A) **R** B) [0 ; ∞⟩ C) ⟨0 ; ∞⟩

D) ⟨1 ; ∞⟩ E) [1 ; ∞⟩

PROBLEMA 194

La gráfica que podría representar mejor a la función polinomial.

F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ / y = F(x) = $-x^3 - x + m$; m ∈ **R** es:

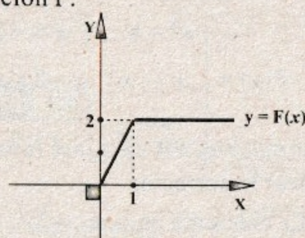
A) B)

C) D)

E)

PROBLEMA 195

Sea la función F:



Esbozar la gráfica de la función G de modo que G(x) = | –1 + F(2 – x) |

A) B)

C) D)

E)

PROBLEMA 196

Determinar el área de la región que resulta al intersectar las gráficas de las relaciones:

$R_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / |x| + |y| \leq 3\}$



$R_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 9/2\}$

A) $9(4+\pi)\mu^2$ B) $9(4-\pi)\mu^2$

C) $\frac{9}{2}(4-\pi)\mu^2$ D) $\frac{9}{2}(4+\pi)\mu^2$

E) N.A.

PROBLEMA 197

F es una función cuadrática tal que

$$F\left(\frac{1}{4}x-3\right)-F\left(\frac{1}{4}x+3\right)=-6(x+2)$$

para todo valor real de x. Encontrar el mínimo valor de F, siendo $F(2) = 0$

A) –1/8 B) 49/8 C) 1/8

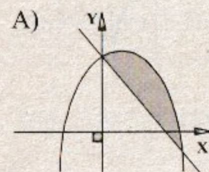
D) –49/8 E) 1/4

PROBLEMA 198

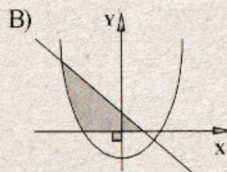
Representar gráficamente al conjunto solución del sistema:

$$x^2 - 6x + 2y - 1 \leq 0$$
$$3x + 7y - 7 \geq 0$$

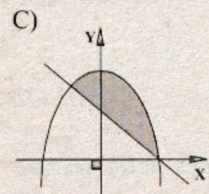
A)



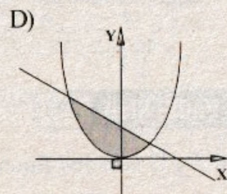
B)



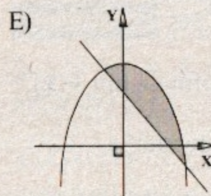
C)



D)



E)



PROBLEMA 199

Determnar el valor de: a – b, de modo que el rango de la función:

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / \; y = F(x) = \sqrt{x-b} + \sqrt[4]{a-x}$ sea $[0 ; 6]$

A) 16 B) 11 C) 14

D) 12 E) 18

PROBLEMA 200

Dada la función:

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / \; y = F(x) = 3x + \sqrt{x^2+7} \; ; \; x \in \langle\sqrt{2};3]$

Determinar F*, si existe:

A) $F^*(x) = \dfrac{3x - \sqrt{x^2+56}}{8} \; ; x \in \langle 3+3\sqrt{2} ; 13]$

B) $F^*(x) = \dfrac{3x + \sqrt{x^2+56}}{8} \; ; x \in \langle 3+3\sqrt{2} ; 13]$

C) $F^*(x) = 3x - \sqrt{x^2+56} \; ; x \in \langle 3+3\sqrt{2} ; 13]$

D) $F^*(x) = \sqrt{x^2+56} \; ; x \in \mathbf{R}$

E) N.A.



PROBLEMA 201

Si F es una función definida por $F(x) = \sqrt{2+\text{sgn}(x)} + \dfrac{x+2}{|x+2|}$ donde:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \ ; \ \text{si } x > 0 \\ 0 \ ; \ \text{si } x = 0 \\ -1 \ ; \ \text{si } x < 0 \end{cases}$$

entonces la suma de los elementos del rango de F es:

A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+2$

C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+4$ D) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+5$

E) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+6$

PROBLEMA 202

Si se define la función:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \ ; \ \text{si } x > 0 \\ 0 \ ; \ \text{si } x = 0 \\ -1 \ ; \ \text{si } x < 0 \end{cases}$$

entonces la suma de todos los valores enteros que son solución de $\sqrt{4 \ \text{sgn}(x) - x^2} \geq 0$, es:

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

PROBLEMA 203

Sea $[\![x]\!] = n$, si $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbf{Z}$ y $\forall x \in \mathbf{R}$. Si F es una función definida por $F(x) = \left[\!\left[\dfrac{3}{x^2+1}\right]\!\right]$. Entonces, el rango de F es:

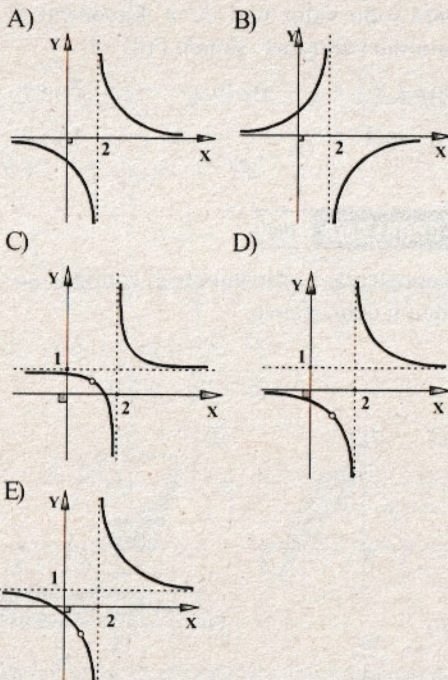
A) $\langle 0 \ ; 3 \rangle$ B) $\{0 \ ; 3\}$ C) $\{1 \ ; 2\}$

D) $\{1 \ ; 3\}$ E) $\{0 \ ; 1 ; 2 \ ; 3\}$

PROBLEMA 204

Si F es una función definida, por

$F(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ entonces la gráfica de F, es:



PROBLEMA 205

Si F y G son dos funciones definidas por:



$F(x) = 2x + 3 \ ; \ x \in \langle -2 \ ; 5\rangle$

$G = \{(1 ; 3), (2 ; 7), (3 ; 9), (7 ; 12), (0 ; 10)\}$

Entonces, la suma de los elementos del rango del (F + G) es:

A) 15 B) 20 C) 35

D) 53 E) 70

PROBLEMA 206

Si F y G son dos funciones definidas por:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ x < 1 \\ x & ; \ x > 1 \end{cases}$$

$G(x) = |x - 2|, \ x \in \langle 2 ; \infty\rangle$

Entonces, el $D_F \cap R_{F+G}$ es:

A) $\langle 2 ; +\infty\rangle$ B) $\langle 1 ; +\infty\rangle$ C) $\langle -\infty ; 1\rangle$

D) $\langle -\infty ; 2]$ E) $\{2\}$

PROBLEMA 207

Si F y G son dos funciones definidas por:

$F(x) = 5x(x + 2) + 9 \quad ; \ x \in \langle -\infty \ ; \ \frac{4}{3}]$

$G(x) = 4x^2 + 7(2x + 1) \ ; \ x \in [-\frac{4}{3} \ ; \infty\rangle$

Entonces el rango de la función:

$$H(x) = \sqrt{(F+G)(x)}, \text{ es:}$$

A) $[-2 ; 0]$ B) $[6 ; 12]$ C) $[0 ; 8]$

D) $\langle 8 ; \infty\rangle$ E) $[-8 ; 8]$

PROBLEMA 208

Si a > b > 0, F y G son dos funciones definidas por:

$F(x) = \sqrt{ax - b}$ y $G(x) = \sqrt{a - bx}$, entonces el dominio de la función (F – G) es:

A) $\left[-\frac{b}{a} \ ; \frac{a}{b}\right]$ B) $\left[\frac{b}{a} \ ; \frac{a}{b}\right]$ C) $[\frac{b}{a} \ ; \infty\rangle$

D) $[b ; a]$ E) $[\frac{a}{b} \ ; \infty\rangle$

PROBLEMA 209

Si F y G son dos funciones definidas por:

$F = \{(-3 ; 4), (-1 ; 0), (2 ; 0), (3 ; 1), (4 ; 1), (5 ; 3), (6 ; 6)\}$

$G = \{(-4 ; -3), (-3 ; 0), (2 ; 3), (3 ; 3), (4 ; 6), (6 ; 5), (7 ; 5)\}$

Entonces, la suma de los elementos del rango de $(F^2 - 2G)$ es:

A) 16 B) 17 C) 18

D) 20 E) 22

PROBLEMA 210

Si F y G son dos funciones definidas por:

$F(x) = -x \quad ; \ x \in \left[0 \ ; \frac{5}{4}\right]$

$G(x) = -\frac{1}{x} \ ; \ x \in \left[\frac{1}{8} \ ; \frac{3}{2}\right]$

Entonces, la longitud de total de la gráfica de la función $(F \ . \ G)(x)$ es:

A) 3/8 B) 5/8 C) 7/8

D) 1 E) 9/8

PROBLEMA 211

Sean F, G y H, funciones definidas por:

$F = \{(3;2), (1;-6), (4;0), (-5;1)\}$

$G = \{(0;4), (3;1), (1;2), (4;-3)\}$

$H = \{(5;1), (1;2), (4;0), (7;-2)\}$

Si $\dfrac{(F+G)^2}{H^3} = \{(a;b)\}$, entonces el valor de $M = a + b$ es:

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 212

Sean F y G dos funciones definidas por:

$F = \{(-2;3), (0;2), (3;8), (5;6)\}$

$G = \{(-3;3), (0;3), (8;9), (-2;0)\}$

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El $D_{F\,o\,G} \subset \{-2;0;1\}$

II. El $R_{F\,o\,G} \in \mathbf{N}$

III. F o G tiene 3 elementos

A) VVV B) FVV C) VVF

D) FVF E) FFV

PROBLEMA 213

Sean F y G dos funciones definidas por:

$F = \{(x;\sqrt{x}) / x \in [0;\infty\rangle\}$

$G = \{(0;1), (2;-3), (4;7), (8;-1), (3;1)\}$

Entonces, la suma de los elementos del $D_{F\,o\,G}$, es:

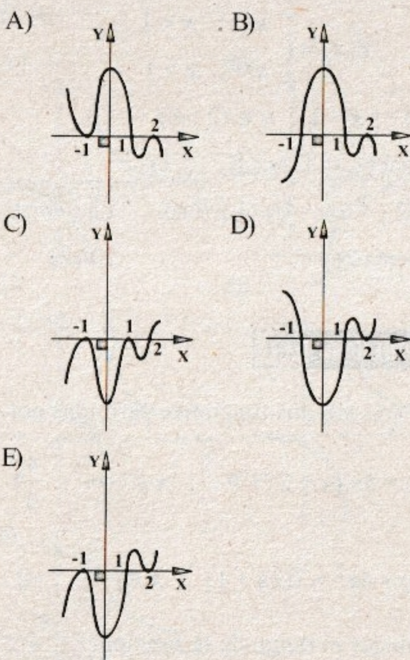
A) 5 B) 7 C) 8

D) 9 E) 11

PROBLEMA 214

Un esbozo de la gráfica de la función:

$F(x) = (x+1)^2(|x|-1)(x-2)^2$ es:



Claves

1. B	23. B	45. D	67. C	89. E	111. D	133. C	155. E	177. C	199. A
2. A	24. B	46. D	68. D	90. E	112. D	134. A	156. A	178. B	200. A
3. B	25. B	47. C	69. C	91. C	113. D	135. D	157. D	179. C	201. C
4. E	26. C	48. A	70. C	92. A	114. C	136. B	158. B	180. D	202. D
5. D	27. D	49. E	71. B	93. D	115. B	137. C	159. A	181. D	203. E
6. B	28. A	50. C	72. C	94. B	116. C	138. D	160. E	182. E	204. E
7. D	29. B	51. E	73. C	95. C	117. B	139. C	161. C	183. E	205. D
8. C	30. C	52. A	74. C	96. B	118. C	140. D	162. C	184. C	206. A
9. D	31. B	53. C	75. C	97. B	119. C	141. D	163. B	185. C	207. C
10. D	32. C	54. B	76. B	98. D	120. A	142. C	164. D	186. D	208. B
11. C	33. A	55. C	77. C	99. D	121. C	143. B	165. D	187. D	209. D
12. C	34. A	56. C	78. C	100. E	122. D	144. D	166. A	188. A	210. E
13. A	35. C	57. A	79. D	101. B	123. D	145. C	167. C	189. E	211. B
14. E	36. E	58. A	80. D	102. A	124. A	146. C	168. D	190. B	212. E
15. B	37. D	59. A	81. D	103. D	125. C	147. C	169. A	191. D	213. B
16. D	38. E	60. D	82. C	104. D	126. C	148. B	170. A	192. D	214. D
17. A	39. E	61. C	83. E	105. B	127. C	149. B	171. C	193. E	215. *
18. D	40. C	62. B	84. B	106. B	128. D	150. C	172. E	194. B	216. *
19. D	41. E	63. A	85. D	107. B	129. B	151. D	173. D	195. D	217. *
20. B	42. E	64. B	86. B	108. E	130. A	152. A	174. B	196. C	218. *
21. C	43. C	65. D	87. E	109. B	131. B	153. D	175. C	197. D	219. *
22. D	44. D	66. A	88. B	110. C	132. A	154. E	176. A	198. E	220. *

- Definiciones previas
- Relaciones
- Funciones
- Funciones especiales
- Clases de funciones
- Funciones notables
- Funciones acotadas
- Funciones monótonas
- Desplazamientos y giros de la gráfica de una función
- Reescalado de la gráfica de una función
- Igualdad de funciones
- Álgebra de funciones
- Composición de funciones
- Función inversa
- Ejercicios y problemas resueltos

Colección Lambda

- **Leyes de exponentes, ecuaciones exponenciales, polinomios, productos notables.**
- **División algebraica, factorización, MCD y MCM de polinomios.**
- **Fracción algebraica, radicación, racionalización.**
- **Factorial, número combinatorio, binomio de Newton.**
- **Análisis combinatorio, probabilidades.**
- **Números complejos.**
- **Ecuaciones.**
- **Ecuaciones II.**
- **Números reales, desigualdades e inecuaciones.**
- **Relaciones y funciones.**
- **Función exponencial y logarítmica.**
- **Limites y derivadas.**
- **Sucesiones y serie.**
- **Matrices y determinantes.**
- **Programación lineal.**



Jr. Rufino Torrico 889 Of. 208 - Cercado de Lima
Telefax: 332-4110 / 726-4141
RPC: 989-101631 / 997-894292 RPM: #995-739126
www.editorialmegabyte.com

